بررسی تاثیر تابع توزیع دما بر تنش معادل فون میزز در دیسک­های دوار مدرج تابعی با پروفیل ضخامت متغیر

ساناز جعفری1\*

 1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه بجنورد، بجنورد

\* بجنورد، صندوق پستي 55111-94531، s.jafari@ub.ac.ir

چکیده

ديسك­هاي دوار قطعات مكانيكي هستند كه در طيف وسيعي از دستگاه­ها و تجهيزات مكانيكي مورد استفاده قرار مي­گيرند. این تجهیزات تحت دماي بالايي كار مي­كنند و با سرعت زاويه­اي زيادي مي­چرخند. برای اطمینان از ایمنی دیسک­ها در این شرایط کاری بهتر است مواد سازنده آن­ها به گونه­ای انتخاب شود تا قابلیت بالایی برای تحمل هر دو تنش­های مکانیکی و حرارتی داشته باشند. در نتیجه می­توان از دیسک­هایی با پروفیل ضخامت متغیر، ساخته شده از مواد مدرج تابعی استفاده کرد. در این مقاله تاثیر شکل تابع توزیع دما بین سطوح داخلی و خارجی دیسک­های دوار بر توزیع تنش معادل فون­میزز با متغیر در نظر گرفتن تمامی خواص هندسی و مکانیکی در راستای شعاعی دیسک بررسی می­شود. از توزیع تنش معادل فون میزز و ماکزیمم مقدار آن می­توان به عنوان معیاری برای تخمین شروع تغییر­شکل­های پلاستیک در دیسک­های دوار استفاده کرد. دیسک دارای سه نوع شرط مرزی متفاوت در سطوح داخلی و خارجی است. از روش هموتوپی پرتوربیشن به عنوان یک روش تحلیلی برای حل معادله ناویر حاکم بر تغییر­شکل­های دیسک دوار برای هر یک از توابع توزیع دما استفاده می­شود. در نهایت نشان داده می­شود که کدام تابع توزیع دما تاثیر بهینه­ای را بر روی توزیع تنش فون­میزز در امتداد شعاعی دیسک دارد و به عنوان نتیجه گیری حالت بهینه توزیع دما با کمترین مقدار ماکزیمم تنش معادل فون میزز مشخص می­گردد. در نهایت آنالیز عددی برای مقادیر متفاوتی از پارامتر ضخامت، نوع تابع توزیع دما و شرایط مرزی متناسب با محیط های کاری دیسک انجام می­شود.

**کلی**د‌واژگ**ان**

دیسک دوار، مواد مدرج تابعی، روش هموتوپی پرتوربیشن، تنش معادل فون میزز، تابع توزیع دما

Investigation of the effect of temperature distribution function on the equivalent Von Mises stress in functionally graded rotating disks with variable thickness

S. Jafari 1\*

1- Faculty of Engineering, University of Bojnord, Bojnord, Iran.

\* P.O.B. 94531-55111, Bojnord, Iran, s.jafari@ub.ac.ir

Abstract

Rotating disks are mechanical components that are used in a wide range of mechanical equipment. This equipment operates at high temperatures and angular velocities. To ensure the safety of the disks under these working conditions, it is advisable to select their components in such a way that they are high strength for both mechanical and thermal stresses. As a result, disks with variable thickness profiles made of functionally graded materials can be used. In this paper, the effect of the shape of temperature distribution function between the inner and outer surfaces of the rotating disks on the distribution of equivalent Von Mises stress is investigated. All the geometric and mechanical properties are changed along the radial direction of the disk. The distribution of Von Mises stress and its maximum values can be used as a criterion to estimate the initiation of plastic deformation in rotating disks. The disk has three different boundary conditions on the inner and outer surfaces. The homotopy perturbation method is used as an analytical method to solve the Navier equation in the disk for each of the temperature distribution functions. Finally, it is shown which temperature distribution function has an optimal effect on the distribution of von Mises stress along the radial of a disk. As a result, the optimum temperature distribution with the lowest value of von Mises stress is determined. Finally, numerical analysis is performed for different values ​​of thickness parameter, type of temperature distribution function and boundary conditions appropriate to disk operating environments.

Keywords

Rotating disk, functionally graded material, Homotopy perturbation method, Equivalent Von Mises stress, Temperature distribution function

1. مقدمه

بسیاری از دیسک­های دوار صنعتی در شرايط عادي، تحت دماي بالايي كار مي­كنند و با سرعت زاويه­اي زيادي مي­چرخند. تنش­های حرارتی ناشی از این تغییرات دمایی به همراه سرعت زاويه­اي بالا، نيروي­های گريز از مركز بزرگی در ديسك ایجاد می­کند که در نتیجه آن مقاومت ماده سازنده ديسك کاهش می­یابد. بنابراین مواد سازنده آن­ها بایستی به گونه­ای انتخاب شوند تا قابلیت بالایی برای تحمل هر دو تنش­های مکانیکی و حرارتی داشته باشند. به همین دلیل استفاده از دیسک­هایی با پروفیل ضخامت غیر یکنواخت، ساخته شده از مواد مدرج تابعی[[1]](#footnote-1) توصیه می­گردد [12-1].

مواد مدرج تابعی برای نخستین بار در سال 1984 در کشور ژاپن برای ساخت تجهیزات فضایی مورد استفاده قرار گرفتند. هدف از کاربرد این مواد به عنوان مواد کامپوزیتی غیر­همگن، افزایش کارایی اجزای مختلف سازه، کنترل تغییرشکل­ها و تنش­های ناخواسته به همراه رسیدن به خواص مطلوب این مواد مانند استحکام بالا، وزن کم، رسانایی خوب، مقاومت بالا در مقابل خوردگی و دمای زیاد است. در این مواد، خواص در هر نقطه توسط یک قانون اختلاط مناسب به صورت تابعی از خواص اجزاء تشکیل دهنده )معمولا فلز و سرامیک) تعریف می­شود. مواد مدرج تابعی در تحلیل دیسک­های دوار هم توسط تعدادی از محققان بررسی شده­اند. در این تحقیقات عموماً از شبیه­سازی­های المان محدود و روش­های عددی برای حل معادلات حاکم بر دیسک استفاده شده است و تاکنون حل تحلیلی برای این معادلات در حالت کلی با متغیر در نظر گرفتن تمامی خواص مکانیکی و هندسی ارائه نشده است. برای رسیدن به یک حل قابل اطمینان، با دقت بالا و هزینه کم، در این مقاله از روش تحلیلی هموتوپی پرتوربیشن برای آنالیز دیسک­های دوار ساخته شده از مواد مدرج تابعی در حالت کلی و برای انواع متفاوتی از تابع توزیع دما و شرایط مرزی دیسک استفاده می­شود. مدل ارائه شده در این مقاله توزیع تنش-تغییر­مکان در دیسک­ها تحت بارگذاری­های مکانیکی-حرارتی را برای انواع شرایط مرزی متناسب با محیط­های کاری واقعی محاسبه می­کند.

از اولین تحقیقان انجام شده بر روی دیسک­های دوار می­توان به حل تحلیلی ديسك­های الاستیک-پلاستیک توسط گمر[[2]](#footnote-2) با استفاده از تئوري تسليم ترسكا[[3]](#footnote-3) اشاره کرد [1]. بعد از ایشان نیز دیسک­های دوار از جنبه­های متفاوتی مورد بررسی قرار گرفتند که در بیشتر آنها دیسک از ماده همگن با خواص مکانیکی مشخص ساخته شده بود. در زمینه دیسک­های دوار مدرج تابعی، يو و همكارانش[[4]](#footnote-4) از نخستین محققانی بودند که استفاده مواد مدرج تابعی را برای ساخت دیسک­های دوار مطرح کردند و ديسك­هاي دوار از جنس فيبرهاي كامپوزيتي را در شرایط بارگذاری سرعت زاویه­ای ثابت و توزیع دمای یکنواخت مورد بررسي قرار دادند. ایشان فرض نمودند که مدول الاستیک، ضریب انبساط حرارتی و چگالی بر اساس تابعی توانی در امتداد شعاعی دیسک تغییر کند[2]. نقد­آبادی و همکاران[[5]](#footnote-5) راه­حل ترموالاستیکی نیمه تحلیلی برای دیسک­های دوار متقارن توپر و توخالی ساخته شده از مواد مدرج تحت شرایط تنش صفحه­ای ارائه دادند [3]. تغییر­شکل دیسک­های دوارمدرج تابعی با استفاده از تئوری تغییر­شکل برشی مرتبه اول توسط بيات[[6]](#footnote-6) و همکاران مورد مطالعه قرار گرفت. در اين مواد فرض بر اين است كه خواص مادي ديسك در راستاي ضخامت تغيير مي­نمايند [4].

در تمامي مواردي كه در بالا ذكر شد، ديسك­ها به صورت هم دما در نظر گرفته مي­شدند. در واقع هيچ گونه گراديان دمائي در ديسك وجود نداشت. اما اراسلان معادلات حاكم بر ديسك­هاي دوار را در هر دو حالت الاستیک و الاستیک-پلاستیک و براي پروفايل­هاي تغيير ضخامت مختلفي با فرض غير همدما بودن ديسك، به وسيله توابع فوق هندسي[[7]](#footnote-7) حل نمود[5]. حجتی و همکاران حل نیمه تحلیلی را برای بررسی توزیع تنش-کرنش در دیسک­هایی با ضخامت و چگالی متغیر به کمک روش­های هموتوپی پرتوربیشن و جداسازی آدمین ارائه کردند که این شکل از خواص مواد هم با وجود دامنه تغییرات محدود در گروه مواد مدرج تابعی قرار می­گیرند[6]. ایشان در ادامه این دیسک­ها را برای تغییر­شکل­های پلاستیک و انواع شرایط مرزی با درنظر گرفتن رفتار کرنش سختی خطی برای دیسک بررسی کردند[7]. اخیرًا جعفری و همکاران[[8]](#footnote-8) روش­های بهینه­سازی مدرن و کلاسیک را در مینیمم کردن وزن دیسک­های دوار بر اساس پارامتر تغییر ضخامت و چگالی در آنها ارائه کردند[8]. هم چنین فرشی و همکاران نیز با روش های غیرگرادیانی دیسک های دوار مدرج را بهینه سازی نمودند[9]. در جدیدترین تحقیقات انجام گرفته بر روی دیسک های دوار، جعفری و همکاران تاثیر مدل­های خرابی مواد نرم را بر روی رفتار تغییر­شکلی پلاستیک دیسک­های دوار با ضخامت متغیر را بررسی کردند. ایشان نشان دادند که با در نظر گرفتن این مدل­ها در شبیه­سازی­ها می­توان پیش­بینی­های واقعی­تری از سرعت­های زاویه­ای حد پلاستیک کامل در دیسک­های دوار ارائه داد [10]. در ادامه آنالیز ترموالاستیک دیسک­های دوار مدرج با در نظرگرفتن پروفیل ضخامت و سرعت زاویه­ای متغیر توسط دای و همکاران[[9]](#footnote-9)، توسط روشی نیمه تحلیلی انجام شده است. ایشان نشان دادند که تغییرات در شعاع دیسک، سرعت زاویه­ای و گرادیان دمایی، ماکزیمم تغییر مکان در دیسک دوار را تحت تاثیر قرار می­دهد[11]. تاثیر گردیان دمایی بر روی تغییر­مکان دیسک­های دوار مدرج، با تعریف تغییرات خطی برای توزیع درجه حرارت در امتداد شعاعی دیسک توسط کائور و همکاران[[10]](#footnote-10) مورد بررسی قرار گرفت[12].

در این مقاله رفتار ترموالاستیک دیسک­های دوار ساخته شده از مواد مدرج تابعی با ضخامت متغیر، تحت تاثیر بارگذاری­های مکانیکی-حرارتی به کمک روش تحلیلی هموتوپی پرتوربیشن مورد بررسی قرار می­گیرد. دیسک دوار دارای پروفیل تغییر ضخامت در راستای شعاعی است، تو خالی می­باشد و سه نوع شرط مرزی متفاوت برای برای سطوح داخلی و خارجی آن در نظر گرفته شده است. برای بارگذاری حرارتی دیسک، 4 تابع توزیع دمای متفاوت بررسی می گردد. از معیار فون­میزز برای محاسبه تنش­های معادل در دیسک استفاده می­شود و ماده مدرج تابعی دیسک در ناحیه تغییر­شکل­های پلاستیک از رفتار کرنش سختی خطی پیروی خواهد کرد. از آنجاییکه تغییر­شکل­های پلاستیک در دیسک­های دوار باعث ایجاد مشکلاتی در فرآیند کاری دیسک شده و مطلوب ما نمی­باشند، در طراحی­ها سعی بر این است که تا حد ممکن این پدیده به تعویق افتد. برای بررسی این موضوع، در این مقاله توزیع تنش معادل فون­میزز در امتداد شعاعی دیسک به دست خواهد آمد. بر همین اساس مطالعه پارامتریک برای مقادیر متفاوتی از پارامتر تغییر ضخامت، نوع تابع توزیع دما و شرایط مرزی دیسک انجام می­گیرد. مطابق با شکل 1 برای دیسک دوار سه نوع شرط مرزی متفاوت در نظر گرفته شده است. همان طور که مشخص است در شرایط مرزی تحت قید شعاعی، سرعت زاویه­ای از طریق شفت دوار به دیسک منتقل می­شود.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| c: radially constrained- radially constrained | b: radially constrained-free | a: Free-free |
| **Fig. 1** Rotary disk with different boundary conditions on the inner and outer surfaces |
| **شکل 1** دیسک دوار با شرایط مرزی متفاوت در سطوح داخلی و خارجی |

**2-مدل سازی مکانیکی-حرارتی دیسک دوار**

**-1-2 خواص هندسی و مکانیکی دیسک دوار مدرج تابعی**

در این مقاله دیسک دوار حلقوی با ضخامت کم و پروفیل ضخامت متغیر در راستای شعاعی مدل می­گردد. شعاع دیسک در سطوح داخلی و خارجی به ترتیب با $r\_{i }$ و $r\_{o }$ نشان داده می­شود. دیسک­های دوار ضخامت متغیر را عموماً با در نظر گرفتن دستگاه مختصاتی استوانه­ای$(r,θ,z)$ ($r,θ,z$) مطابق شکل 2 مدل­سازی می­کنند. ديسك با سرعت زاويه­اي ثابت $ω$ حول محور خود دوران می­کند و تحت تاثیر بارگذاری حرارتی متقارن$T(r)$ نیز قرار دارد. از آنجایی كه نسبت شعاع به ضخامت در ديسك­هاي دوار زياد است، مي­توان با دقت قابل قبولي دیسک را نازک در نظر گرفت و فرض تنش صفحه­اي را در معادلات میدان اعمال کرد ($σ\_{z}=0$). به علاوه پارامترهای ابعادی دیسک را می­توان در جدول 1 مشاهده کرد.

|  |
| --- |
|  |
| **Fig. 2** An example of disk with variable profiles in terms of $r\_{i }$ and $r\_{o }$ in a cylindrical coordinate system. |
| **شکل 2** نمونه­ای از پروفيل ديسك با ضخامت متغیر بر حسب پارامترهای$r\_{i }$ و $r\_{o }$ در دستگاه مختصات استوانه­ای |

**جدول 1** پارامترهای ابعادی دیسک دوار حلقوی

**Table 1** Dimensional parameters of annular rotating disk.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| شعاع داخلی ($r\_{i}$$r\_{i }$) | شعاع خارجی ($r\_{o}$$r\_{o }$) | ضخامت دیسک($h\_{o}$$h\_{o }$) |
| 0.2 m | 1 m | 0.1 m |

ديسك­هاي دوار با تغییر خواص مکانیکی در راستای شعاعی را می­توان از لحاظ ساختاری مدرج تابعی در نظر گرفت و با تعریف یک قانون اختلاط مناسب می­توان خواص مکانیکی دیسک را به عنوان تابعی از کسر حجمی[[11]](#footnote-11)، بین خواص سرامیک و فلز از لبه داخلی تا لبه خارجی تغییر داد. در این مقاله سطح داخلی دیسک از جنس آلمینیوم و سطح خارجی دیسک از جنس سرامیک زیرکونیا[[12]](#footnote-12) است. خواص مکانیکی این مواد در جدول 2 آورده شده است.

**جدول 2** خواص مکانیکی فلز و سرامیک در ماده مدرج تابعی دیسک دوار

**Table 2** Mechanical Properties of metal and ceramic in rotating disk functionally graded Material

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| زیرکونیا | آلمینیوم | خواص مواد |
| 151 | 70 | مدول یانگ ($E$) (GPa) |
| 0.3 | 0.3 | ضریب پواسان ($v$) |
| 5700 | 2700 | چگالی ($ρ$) ($^{kg}/\_{m^{3}}$) |
| 10 | 23 | ضریب انبساط حرارتی ($α$) ($^{10^{-6}}/\_{℃}$) |
| --- | 300 | تنش تسلیم ($σ\_{0}$) (MPa) |
| --- | 35 | مدول تانژانت ($E\_{t}$) (GPa) |

بر همین اساس می توان تابع کسر حجمی $V(r)$و شاخص درجه بندی $m$ را به صورت زیر تعریف کرد:

|  |  |
| --- | --- |
| $$V\left(r\right)=\left(^{r}/\_{r\_{o}}\right)^{m}, m=\frac{Ln (^{P\_{i}}/\_{P\_{o}})}{Ln (^{r\_{i}}/\_{r\_{o}})}$$ | (1) |

مدول الاستیک، چگالی، ضریب انبساط حرارتی، ضریب هدایت حرارتی به همراه پروفیل تغییر ضخامت دیسک بر اساس رابطه (1)، بین سطوح داخلی و خارجی مطابق جدول 3 تغییر خواهند کرد و ضریب پواسان در دیسک ثابت در نظر گرفته می­شود. در روابط موجود در جدول 3،$E\_{e}, ρ\_{e}, α\_{e},k\_{e}$ به ترتیب مقادیر مرجع برای مدول الاستیک، چگالی، ضریب انبساط حرارتی می­باشند و $h\_{e}$ همان ضخامت ديسك در سطح خارجی ($r=r\_{o}$) است. به علاوه پارامترهای $m\_{1}, m\_{2}, m\_{3}$ به عنوان پارامترهای شاخص درجه بندی این خواص مکانیکی در ساختار مواد مدرج تابعی و $m\_{5}$ به عنوان پارامتر تغییر ضخامت دیسک شناخته می­شوند.

**جدول 3** خواص مکانیکی مواد مدرج تابعی با تعریف پارامترهای موجود در آن­ها

**Table 3** Mechanical properties and parameters in functionally graded materials.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| مدول الاستیک | چگالی | ضریب انبساط حرارتی | پروفیل ضخامت |
| $$E\left(r\right)=E\_{e}\left(^{r}/\_{r\_{o}}\right)^{m\_{1}}$$ | $$ρ\left(r\right)=ρ\_{e}\left(^{r}/\_{r\_{o}}\right)^{m\_{2}}$$ | $$α\left(r\right)=α\_{e}\left(^{r}/\_{r\_{o}}\right)^{m\_{3}}$$ | $$h\left(r\right)=h\_{e}\left(^{r}/\_{r\_{o}}\right)^{m\_{5}}$$ |
| $$E\_{e}=E\_{o}$$ | $$ρ\_{e}=ρ\_{o}$$ | $$α\_{e}=α\_{o}$$ | $$h\_{e}=h\_{o}$$ |
| $$m\_{1}=\frac{Ln (^{E\_{i}}/\_{E\_{o}})}{Ln (^{r\_{i}}/\_{r\_{o}})}$$ | $$m\_{2}=\frac{Ln (^{ρ\_{i}}/\_{ρ\_{o}})}{Ln (^{r\_{i}}/\_{r\_{o}})}$$ | $$m\_{3}=\frac{Ln (^{α\_{i}}/\_{α\_{o}})}{Ln (^{r\_{i}}/\_{r\_{o}})}$$ | $$-1\leq m\_{5}\leq 0$$ |

**-2-2تنش معادل در دیسک دوار مدرج تابعی**

در این مقاله رفتار مواد مدرج تابعی برای تغییر­شکل­های الاستیک-پلاستیک به صورت کرنش سختی خطی تعریف شده است. از نقطه نظر شروع تسلیم در مواد مدرج تابعی، زمانی که تنش معادل فون میزز در دیسک به تنش تسلیم مواد سازنده دیسک برسد، دیسک وارد تغییر­شکل­های پلاستیک می­شود و سرعت زاویه­ای معادل با آن به عنوان سرعت زاویه­ای حد الاستیک نامگذاری می­گردد. تنش معادل فون میزز در دیسک دوار حلقوی ساخته شده از مواد مدرج تابعی طبق رابطه زیر محاسبه می شود:

|  |  |
| --- | --- |
| $$σ\_{eq}=\sqrt{σ\_{r}^{2}+σ\_{θ}^{2}-σ\_{r}σ\_{θ}}$$ | (2) |

در این رابطه $σ\_{r}$ و $σ\_{θ}$ به ترتیب تنش های شعاعی و محیطی در دیسک می­باشند. از آنجاییکه بارگذاری، هندسه و شرایط مرزی در دیسک دوار متقارن است، تنش برشی در دیسک تشکیل نمی­شود و این تنش­ها، همان مولفه­های اصلی در دیسک هستند.

 **-3-2تعریف توابع توزیع دما در دیسک**

در این مقاله دیسک دوار حلقوی مدرج تابعی تحت میدان حرارتی قرار دارد که در امتداد شعاعی دیسک تغییر می­کند. با در نظر گرفتن تقریب یک بعدی از توزیع دما، در این مقاله 4 شکل متفاوت از تابع توزیع دما در داخل دیسک دوار ($T(r)$) مطابق با جدول 4 در نظر گرفته می­شود. در این جدول $T\_{0}$ دما در سطح داخلی دیسک است که مشخص و ثابت می­باشد. به علاوه در شکل 3 می­توان تفاوت این توابع توزیع دما در این مدل­ها را مشاهده کرد. همان طور که مشخص است از مدل A تا D، توزیع دما در داخل دیسک از حالت توزیع ثابت و یکنواخت به حالت توزیع غیر خطی وغیر یکنواخت تغییر می­نماید. در مدل­های B و D نرخ تغییرات از سطح داخلی تا سطح خارجی دیسک نزولی است و در مدل C نرخ تغییرات صعودی دما را خواهیم داشت. اما، در مدل A توزیع دما در دیسک ثابت است.

**جدول 4** توابع توزیع دما بین سطوح داخلی و خارجی دیسک دوار

**Table 4** Temperature distribution functions between the inner and outer surfaces of the rotating disk

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| مدل $D$ | مدل $C$ | مدل $B$ | مدل $A$ |  |
| $$T\left(r\right)=T\_{0}(\frac{r\_{0}^{2}-r^{2}}{r\_{0}^{2}-r\_{i}^{2}})$$ | $$T\left(r\right)=T\_{0}(\frac{r-r\_{i}}{r\_{0}-r\_{i}})$$ | $$T\left(r\right)=T\_{0}(\frac{r\_{0}-r}{r\_{0}-r\_{i}})$$ | $$T\left(r\right)=T\_{0}$$ | توابع توزیع دما |

|  |
| --- |
|  |
| **Fig. 3** An example of disk with variable profiles in terms of $r\_{i }$ and $r\_{o }$ in a cylindrical coordinate system. |
| **شکل 3** توزیع دما بین سطوح داخلی و خارجی دیسک دوار مطابق با توابع جدول 4 |

**-4-2مدل سازی مکانیکی دیسک دوار [6-8]**

مطابق با شکل 2، دیسک دوار حلقوی مدرج تابعی با شعاع داخلی $r\_{i}$ و شعاع خارجی$r\_{o}$ تحت بارگذاری­های متقارن مکانیکی و حرارتی( $T=T(r)$ ) قرار دارد. در مسئله مورد بررسی، آنالیز تنش­های ترموالاستیک در دیسک دوار با نوشتن معادلات تعادل حاکم بر دیسک به فرم ناویر، بر اساس روابط حاکم بر تغییر­شکل­های کوچک، حالت تنش ضفحه­ای و اعمال فرض تقارن محوری انجام می­گیرد. بر این اساس تمامی متغیرهای موجود در معادلات ناویر مستقل از موقعیت محیطی $θ$ می­باشند، مولفه تنش برشی ($τ\_{rθ}$) از معادلات حذف خواهد شد و مولفه تنش در راستای ضخامت ($σ\_{z}$) نیز برابر صفر است. با در نظر گرفتن المانی از دیسک دوار به همراه تمامی نیروهای داخلی در امتداد شعاعی ($r$) و محیطی ($θ$)، نوشتن معادلات تعادل در این دو راستا و اعمال فرضیات بالا به این معادلات، نهایتا معادله تعادل حاکم بر دیسک به فرم زیر خلاصه می شود:

|  |  |
| --- | --- |
| $$\frac{d}{dr}\left(σ\_{r}\left(r\right)h\left(r\right)r\right)-σ\_{θ}\left(r\right)h\left(r\right)=-ρ\left(r\right)ω^{2}r^{2}h(r)$$ | (2) |

در این روابطه $ ρ\left(r\right)$تابع توزیع چگالی در دیسک، $ω$ سرعت زاویه­ای می­باشند. به علاوه $σ\_{r}\left(r\right)$و $σ\_{θ}\left(r\right)$به ترتیب مولفه­های شعاعی و محیطی تنش عمودی در دیسک است. با در نظر گرفتن شرط تقارن محوری، روابط کرنش-تغییر مکان در دیسک دوار به صورت زیر تعریف می­شوند:

|  |  |
| --- | --- |
| $$ε\_{r}\left(r\right)=\frac{du\_{r}(r)}{dr}$$ | (3) |
| $$ε\_{θ}\left(r\right)=\frac{u(r)}{r}+\frac{1}{r}\frac{du\_{θ}(r)}{dr}→ε\_{θ}\left(r\right)=\frac{u(r)}{r}$$ | (4) |

از آنجاییکه دیسک تحت تغییرات دمایی قرار دارد بایستی کرنش حرارتی نیز به کرنش­های عمودی در هر راستا اضافه گردد. $ε^{T}(r)$ بیانگر کرنشی است که از تغییر دما در دیسک ایجاد می­گردد. این کرنش بر اساس تابع تغییر دما حاکم بر دیسک ($T(r)$) در راستای شعاعی تغییر می­کند و به کمک تابع ضریب انبساط حرارتی $α(r)$ به شکل زیر قابل محاسبه است:

|  |  |
| --- | --- |
| $$ε^{T}\left(r\right)=α(r)T(r)$$ | (5) |

برای رسیدن به فرم ناویر معادلات تعادل، بایستی مولفه­های تنشی حاکم بر دیسک دوار در رابطه (2) جایگذاری شوند. در همین راستا می­توان این مولفه­های تنش را بر اساس کرنش های عمودی و حرارتی، به کمک روابط زیر بیان کرد:

|  |  |
| --- | --- |
| $$σ\_{r}\left(r\right)=\frac{E(r)}{1-v^{2}}\left(ε\_{r}\left(r\right)+vε\_{θ}\left(r\right)-(1+v)α(r)T(r)\right)$$ | (6) |
| $$σ\_{θ}\left(r\right)=\frac{E(r)}{1-v^{2}}\left(ε\_{θ}\left(r\right)+vε\_{r}\left(r\right)-(1+v)α(r)T(r)\right)$$ | (7) |

با جایگزینی روابط بالا در معادله تعادل (2)، معادله ناویر حاکم بر دیسک­های دوار بر اساس تغییر­مکان در راستای شعاعی دیسک ($u\_{r}(r)$) به دست می­آید:

|  |  |
| --- | --- |
| $u\_{θ}$$\frac{d^{2}u\_{r}(r)}{dr^{2}}+\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{h(r)}\frac{dh(r)}{dr}+\frac{1}{E(r)}\frac{dE(r)}{dr}\right)\frac{du\_{r}(r)}{dr}+\left(\frac{v}{rh\left(r\right)}\frac{dh\left(r\right)}{dr}+\frac{v}{rE\left(r\right)}\frac{dE\left(r\right)}{dr}-\frac{1}{r^{2}}\right)u\_{r}\left(r\right)+\left(-\frac{1}{h\left(r\right)}\frac{dh\left(r\right)}{dr}-\frac{1}{E\left(r\right)}\frac{dE\left(r\right)}{dr}-\frac{1}{α\left(r\right)}\frac{dα\left(r\right)}{dr}\right)α\left(r\right)\left(1+v\right)T\left(r\right)=-\frac{\left(1-v^{2}\right)ρ(r)ω^{2}r}{E(r)}$ | (8) |

همان طور كه مشاهده مي­شود اين يك معادله ديفرانسيل غير خطي از مرتبه دو و غير همگن است و در آن مراتب متفاوتی از مشتقات تابع مجهول وجود دارد. در این رابطه تابع $T\left(r\right)$وجود دارد که مطابق با توابع تعریف شده در جدول 4 در این معادله دیفرانسیل جایگذاری می­گردد. به علاوه تغییرات خواص مکانیکی و هندسی مطابق با روابط موجود در جدول 3 را می­توان در این معادله مشاهده کرد. حل تحلیلی این معادله بسیار سخت است، اما برای اولین بار در این مقاله معادله ناویر حاکم بر تغییر­شکل­های دیسک دوار به همراه تاثر تغییرات دمایی در دیسک به روش تحلیلی هموتوپی پرتوربیشن برای انواع متفاوتی از تابع توزیع دما حل خواهند شد.

**-3 معرفی روش­ تحلیلی هموتوپی پرتوربیشن [13-15]**

در این بخش اساس روش هموتوپی پرتوربیشن بیان می­گردد. برای نشان دادن اصول این روش، معادله دیفرانسیلی غیرخطی زير را در نظر مي­گيريم:

|  |  |
| --- | --- |
| $$A\left(u\right)-f\left(r\right)=0, rϵΘ$$ | (9) |

با شرایط مرزی:

|  |  |
| --- | --- |
| $$B\left(u,^{∂u}/\_{∂n}\right)=0, rϵΓ$$ | (10) |

در روابط بالا، $ u$ تابع مجهول، $ A$ یک عملگر دیفرانسیلی کلی، $f\left(r\right)$ تابع تحلیلی معلوم، $B$ یک عملگر مرزی و $Γ$ مرز حوزه $Θ$ می­باشد. یکی از مهمترین مراحل حل به این روش، یافتن بخش­های خطی و غیر خطی عملگر $ A$ است و می­توان این عملگر را به طور کلی به دو قسمت خطی $ L$ و غیرخطی$ N$ تجزیه کرد. بنابراین معادله(9)، را می­توان بصورت زیر نوشت:

|  |  |
| --- | --- |
| $$L\left(u\right)+N\left(u\right)-f\left(r\right)=0$$ | (11) |

بر اساس تکنیک هموتوپی، می­توان تابع هموتوپی$v\left(r,p\right):Θ×[0,1]→R$را به نحوی تشکیل داد که معادلات زیر را ارضاء کند:

|  |  |
| --- | --- |
| $$H\left(v,p\right)=L\left(v\right)-L\left(u\_{o}\right)+pL\left(u\_{o}\right)+p\left[N\left(v\right)-f\left(r\right)\right]=0$$ | (12) |

که $pϵ[0,1]$ و$u\_{o}$ یک حدس اولیه از معادله (12) می­باشد که بطور کلی شرایط مرزی را ارضاء می­کند. بدیهی است که از معادله (25) داریم:

|  |  |
| --- | --- |
| $$H\left(v,0\right)=L\left(v\right)-L\left(u\_{0}\right)=0$$ | (13) |
| $$H\left(v,1\right)=A\left(v\right)-f(r)=0$$ | (14) |

واضح است که وقتی $p=0$ باشد، معادله (12) به یک معادله خطی و در هنگامی که $p=1$ باشد، به معادله غیرخطی اولیه تبدیل می­گردد. بنابراین فرآیند افزایش یکنواخت$ p$ از صفر به یک، همان فرآیند تبدیل$ L\left(v\right)-L\left(u\_{o}\right)=0$به$ A\left(v\right)-f\left(r\right)=0$می­باشد که این فرآیند اساس روش هموتوپی است. فرض اساسی در این روش، این است که جواب معادله (12) را به توان به صورت یک سری توانی از $p$ نوشت:

|  |  |
| --- | --- |
| $$v=v\_{0}+pv\_{1}+p^{2}v\_{2}+p^{3}v\_{3}+…$$ | (15) |

برای شروع حل بایستی معادله (15) را در معادله (12) جایگزین کرد و رابطه به دست آمده را بر حسب توان­های مختلف $p$ ($p^{0},p^{1},p^{2},…$) مرتب نمود. هر یک از ضرایب توان­های$p$ یک معادله دیفرانسیل بر اساس متغیر $v(r,p)$ خواهند بود که بایستی حل شوند و در نهایت با حد زیر جواب تقریبی معادله (12) را بدست آورد:

|  |  |
| --- | --- |
| $$u=\lim\_{p→1}v=v\_{0}+v\_{1}+v\_{2}+v\_{3}+…$$ | (16) |

سری فوق، در اکثر موارد به جواب همگرا می­شود، ولی سرعت همگرایی به جمله غیرخطی $N\left(v\right)$ بستگی دارد.

**-4حل معادله ناویر به روش تحلیلی هموتوپی پرتوربیشن**

فرم نهایی معادله ناویر حاکم بر اساس تغییر­شکل مجهول در دیسک دوار مدرج تابعی، با جایگزینی توابع مدول الاستیک، چگالی، ضریب انبساط حرارتی و پروفیل ضخامت در رابطه (8) به صورت زیر می باشد:

|  |  |
| --- | --- |
| $$\frac{d^{2}u\_{r}(r)}{dr^{2}}+\left(\frac{1+m\_{1}-m\_{5}}{r}\right)\frac{du\_{r}(r)}{dr}+\left(\frac{-1+vm\_{1}-m\_{5}}{r^{2}}\right)u\_{r}\left(r\right)+\left(\frac{\left(-m\_{1}-m\_{3}+m\_{5}\right)(1+v)α\_{e}\left(\frac{r}{r\_{o}}\right)^{m\_{3}}}{r}\right)T\left(r\right)=-\frac{\left(1-v^{2}\right)ρ\_{e}\left(\frac{r}{r\_{o}}\right)^{m\_{2}}ω^{2}r\left(\frac{r}{r\_{o}}\right)^{-m\_{1}}}{E\_{e}}$$ | (17) |

همان طور که مشخص است در این رابطه تابع توزیع دما در دیسک ($T\left(r\right)$) وجود دارد که بر اساس 4 مدل موجود در جدول 4 در این رابطه جایگذاری خواهند شد و برای هر کدام از مدل­ها مسئله حل تحلیلی شده و در نهایت توزیع تنش فون میزز محاسبه می­گردد. برای شروع حل به روش هموتوپی پرتوربیشن، ابتدا بخش­هاي خطي و غير خطي معادله (17) با در نظر گرفتن شرط همگرایی، به صورت زیر تعیین می­شوند:

|  |  |
| --- | --- |
| $$L\left(u\_{r}\left(r\right)\right)=\frac{d^{2}}{dr^{2}}u\_{r}\left(r\right)+\frac{\left(1+m\_{1}-m\_{5}\right)}{r}\frac{d}{dr}u\_{r}\left(r\right)+\frac{\left(-1+vm\_{1}-m\_{5}\right)}{r^{2}}u\_{r}\left(r\right)$$ | (18) |
| $$N\left(u\_{r}\left(r\right)\right)=0$$ | (19) |
| $$f\left(r\right)=\left(\frac{\left(-m\_{1}-m\_{3}+m\_{5}\right)\left(1+v\right)α\_{e}\left(\frac{r}{r\_{o}}\right)^{m\_{3}}}{r}\right)T(r)+\frac{\left(1-v^{2}\right)ρ\_{e}\left(\frac{r}{r\_{o}}\right)^{m\_{2}}ω^{2}r\left(\frac{r}{r\_{o}}\right)^{-m\_{1}}}{E\_{e}}$$ | (20) |

همانطور که از روابط بالا مشخص است تاثیر مدل­های متفاوت توزیع دما در داخل دیسک دوار در محاسبه تابع $f\left(r\right)$در روش هموتوپی پرتوربیشن ظاهر می­گردد. در نتیجه برای هر مدل های توزیع دما $A$ تا $D$، تابع$ f\left(r\right)$ مطابق با روابط (21-24) تعریف می شود:

|  |  |
| --- | --- |
| (21) | $$f\left(r\right)=\left(\frac{\left(-m\_{1}-m\_{3}+m\_{5}\right)\left(1+v\right)α\_{e}\left(\frac{r}{r\_{o}}\right)^{m\_{3}}}{r}\right)(T\_{0})+\frac{\left(1-v^{2}\right)ρ\_{e}\left(\frac{r}{r\_{o}}\right)^{m\_{2}}ω^{2}r\left(\frac{r}{r\_{o}}\right)^{-m\_{1}}}{E\_{e}}$$ |
| (22) | $$f\left(r\right)=\left(\frac{\left(-m\_{1}-m\_{3}+m\_{5}\right)\left(1+v\right)α\_{e}\left(\frac{r}{r\_{o}}\right)^{m\_{3}}}{r}\right)(T\_{0}(\frac{r\_{0}-r}{r\_{0}-r\_{i}}))+\frac{\left(1-v^{2}\right)ρ\_{e}\left(\frac{r}{r\_{o}}\right)^{m\_{2}}ω^{2}r\left(\frac{r}{r\_{o}}\right)^{-m\_{1}}}{E\_{e}}$$ |
| (23) | $$f\left(r\right)=\left(\frac{\left(-m\_{1}-m\_{3}+m\_{5}\right)\left(1+v\right)α\_{e}\left(\frac{r}{r\_{o}}\right)^{m\_{3}}}{r}\right)(T\_{0}(\frac{r-r\_{i}}{r\_{0}-r\_{i}}))+\frac{\left(1-v^{2}\right)ρ\_{e}\left(\frac{r}{r\_{o}}\right)^{m\_{2}}ω^{2}r\left(\frac{r}{r\_{o}}\right)^{-m\_{1}}}{E\_{e}}$$ |
| (24) | $$f\left(r\right)=\left(\frac{\left(-m\_{1}-m\_{3}+m\_{5}\right)\left(1+v\right)α\_{e}\left(\frac{r}{r\_{o}}\right)^{m\_{3}}}{r}\right)(T\_{0}(\frac{r\_{0}^{2}-r^{2}}{r\_{0}^{2}-r\_{i}^{2}}))+\frac{\left(1-v^{2}\right)ρ\_{e}\left(\frac{r}{r\_{o}}\right)^{m\_{2}}ω^{2}r\left(\frac{r}{r\_{o}}\right)^{-m\_{1}}}{E\_{e}}$$ |

حال بایستی تابع هموتوپي مطابق با رابطه (22) ایجاد شود. در اين معادله$v\left(r\right)$ به عنوان تابع مجهول و$u\_{0}\left(r\right)$ به عنوان تابع شرايط اوليه معادله ديفرانسيل تعریف می­شود كه خود نیز مجهول است:

|  |  |
| --- | --- |
| $$L\left(v\left(r\right)\right)=\frac{d^{2}}{dr^{2}}v\left(r\right)+\frac{\left(1+m\_{1}-m\_{5}\right)}{r}\frac{d}{dr}v\left(r\right)+\frac{\left(-1+vm\_{1}-m\_{5}\right)}{r^{2}}v\left(r\right)$$ | (25) |
| $$L\left(u\_{0}\left(r\right)\right)=\frac{d^{2}}{dr^{2}}u\_{0}\left(r\right)+\frac{\left(1+m\_{1}-m\_{5}\right)}{r}\frac{d}{dr}u\_{0}\left(r\right)+\frac{\left(-1+vm\_{1}-m\_{5}\right)}{r^{2}}u\_{0}\left(r\right)$$ | (26) |

در مرحله بعدي تابع $v\left(r\right)$ مطابق با رابطه (15) تعریف می­شود. با جايگزين نمودن معادلات(26-25) به همراه تابع $f\left(r\right)$ در معادله هموتوپی (22)، بایستی معادله به دست آمده را بر حسب توان­هاي$p$ مرتب کرد. برای تمامی معادله های ناویر حاکم بر دیسک با توابع توزیع دما $A$ تا $D$ ، ضرایب توان­های$p$ برای هر چهار تابع توزیع دما یکسان است و فقط ضرایب توان $p^{1}$ متفاوت خواهد بود. به این دلیل که تاثیر $f\left(r\right)$متفاوت در ضرایب توان $p^{1}$ ظاهر می­گردد. در ادامه معادله ناویر حاکم بر دیسک که بر اساس مدل توزیع دمای $A$ به دست می آید به طور کامل حل خواهد شد. برای مدل­های بعدی فقط حل معادله آورده می­شود.

* مدل توزیع دما A :

|  |  |
| --- | --- |
| $$p^{0}: - \frac{1}{r}\frac{d}{dr}u\_{0}\left(r\right)-\frac{m\_{1}}{r}\frac{d}{dr}u\_{0}\left(r\right)-\frac{m\_{1}v}{r^{2}}u\_{0}\left(r\right)$$$$+\frac{m\_{1}v}{r^{2}}\frac{d}{dr}v\_{0}\left(r\right)+\frac{m\_{5}v}{r^{2}}u\_{0}\left(r\right)+ \frac{1}{r}\frac{d}{dr}v\_{0}\left(r\right)-\frac{m\_{5}}{r}\frac{d}{dr}v\_{0}\left(r\right)$$$$+\frac{m\_{1}}{r}\frac{d}{dr}v\_{0}\left(r\right)+\frac{m\_{5}}{r}\frac{d}{dr}u\_{0}\left(r\right)+\frac{d^{2}}{dr^{2}}v\_{0}\left(r\right)-\frac{m\_{5}v}{r^{2}}v\_{0}\left(r\right)$$$$+\frac{1}{r^{2}}u\_{0}\left(r\right)-\frac{1}{r^{2}}v\_{0}\left(r\right)-\frac{d^{2}}{dr^{2}}u\_{0}\left(r\right)=0$$ | (27) |
| $$p^{1}: - \frac{m\_{5}}{r}\frac{d}{dr}u\_{0}\left(r\right)- \frac{m\_{5}}{r}\frac{d}{dr}v\_{1}\left(r\right)+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}u\_{0}\left(r\right)+\frac{m\_{1}v}{r^{2}}u\_{0}\left(r\right)+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}v\_{1}\left(r\right)-\frac{1}{r^{2}}v\_{1}\left(r\right)-\frac{m\_{5}v}{r^{2}}u\_{0}\left(r\right)+\frac{m\_{1}v}{r^{2}}v\_{1}\left(r\right)+\frac{m\_{1}}{r}\frac{d}{dr}u\_{0}\left(r\right)+\frac{d^{2}}{dr^{2}}u\_{0}\left(r\right)+\frac{d^{2}}{dr^{2}}v\_{1}\left(r\right)-\frac{m\_{5}v}{r^{2}}v\_{1}\left(r\right)-\frac{1}{r^{2}}u\_{0}\left(r\right)+\frac{m\_{1}}{r}\frac{d}{dr}v\_{1}\left(r\right)+\left(\frac{\left(-m\_{1}-m\_{3}+m\_{5}\right)\left(1+v\right)α\_{e}\left(\frac{r}{r\_{o}}\right)^{m\_{3}}}{r}\right)(T\_{0})+\frac{\left(1-v^{2}\right)ρ\_{e}\left(\frac{r}{r\_{o}}\right)^{m\_{2}}ω^{2}r\left(\frac{r}{r\_{o}}\right)^{-m\_{1}}}{E\_{e}}=0$$ | (28) |
| $$p^{2}: \frac{d^{2}}{dr^{2}}v\_{2}\left(r\right)+\frac{m\_{1}v}{r^{2}}v\_{2}\left(r\right)- \frac{m\_{5}}{r}\frac{d}{dr}v\_{2}\left(r\right)-\frac{m\_{5}v}{r^{2}}v\_{2}\left(r\right) $$$$+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}v\_{2}\left(r\right) -\frac{1}{r^{2}}v\_{2}\left(r\right)+\frac{m\_{1}}{r}\frac{d}{dr}v\_{2}\left(r\right)=0$$ | (29) |

براي محاسبه تابع مجهول$ v\left(r\right)$ بايستي معادلات ديفرانسيلي بالا حل شوند. براي حل معادله (27) فرض مي­كنيم كه $v\_{0}\left(r\right)=u\_{0}\left(r\right)$ باشد:

|  |  |
| --- | --- |
| $$v\_{0}\left(r\right)=C\_{3}r^{-\frac{1}{2}m\_{1}+\frac{1}{2}m\_{5}+\frac{1}{2}\sqrt{m\_{1}^{2}-2m\_{1}m\_{5}-4m\_{1}v+m\_{5}^{2}+4m\_{5}v+4}}+C\_{4}r^{-\frac{1}{2}m\_{1}+\frac{1}{2}m\_{5}-\frac{1}{2}\sqrt{m\_{1}^{2}-2m\_{1}m\_{5}-4m\_{1}v+m\_{5}^{2}+4m\_{5}v+4}}$$ | (30) |

 با جايگذاري معادله (30) در رابطه (28) و حل آن بر حسب $v\_{1}\left(r\right)$ داريم:

|  |  |
| --- | --- |
| $v\_{1}\left(r\right)=v\_{0}\left(r\right)+φ(r)$, | (30) |
| $φ\left(r\right)=\left(\frac{γ(r)}{β(r)}\right)$, |  |
| $$γ\left(r\right)=-16(ω^{2}ρ\_{e}(\left(-m\_{3}-v-1\right)m\_{1}+\left(m\_{3}+v+1\right)m\_{5}-m\_{3}^{2}-$$$$\left(m\_{3}+v+1\right)m\_{5}-m\_{3}^{2}-2m\_{3})r^{-m\_{1}+2+m\_{2}}r\_{e}^{m\_{1}-m\_{2}}(v-1)+$$$$α\_{e}r\_{e}^{-m\_{3}}T\_{0}E\_{e}r\_{e}^{m\_{3}}(\left(m\_{5}-m\_{2}+v-3\right)m\_{1}+(-m\_{2}-v-3)m\_{5}r(1+v)$$ |  |
| $$β\left(r\right)=\left(m\_{5}-2-m\_{1}-2m\_{3}+A\right)E\_{e}\left(-6+m\_{5}+m\_{1}-2m\_{2}+A\right)$$$$\left(m\_{5}-2-m\_{1}-2m\_{3}-A\right)\left(-6+m\_{5}+m\_{1}-2m\_{2}-A\right)$$ |  |
| $$A=\sqrt{m\_{1}^{2}+\left(-4v-2m\_{5}\right)m\_{1}+m\_{5}^{2}+4vm\_{5}+4}$$ |  |

به طور مشابه براي معادله(29) داريم:

|  |  |
| --- | --- |
| $$v\_{2}\left(r\right)=v\_{0}\left(r\right)$$ | (32) |

براي يافتن تابع مجهول $u\_{r}\left(r\right)$ لازم است كه معادلات (30-32) در معادله (16) جايگزين شوند و به طور همزمان $v\left(r\right)→u\_{r}\left(r\right)$ و $p→1$ ميل داده شود. اين كار به معناي يافتن پاسخ براي معادله ديفرانسيل حاكم بر دیسک­های دوار مدرج تابعی تحت بارگذاری مکانیکی-حرارتی است. بنابراين حل اين معادله برابر است با:

|  |  |
| --- | --- |
| $$u\_{r}\left(r\right)=v\_{0}\left(r\right)-φ(r)$$ | (33) |

در معادله (33) پارامترهاي $C\_{3} $ و $C\_{4}$ مجهول بوده و بر اساس شرايط مرزي حاکم بر دیسک تعيين مي­شوند. در این مقاله دیسک تحت سه نوع شرط مرزی متفاوت قرار دارد. معادلات حاکم بر مابقی مدل­های توزیع دما نیز به همین صورت حل خواهند شد و در ادامه فقط پاسخ نهایی برای این مدل­ها آورده شده است.

* مدل توزیع دما B :

|  |  |
| --- | --- |
| $u\_{r}\left(r\right)=v\_{0}\left(r\right)+\left(\frac{γ(r)}{β(r)}\right)$, | (33) |
| $$v\_{0}\left(r\right)=C\_{3}r^{-\frac{1}{2}m\_{1}+\frac{1}{2}m\_{5}+\frac{1}{2}\sqrt{m\_{1}^{2}-2m\_{1}m\_{5}-4m\_{1}v+m\_{5}^{2}+4m\_{5}v+4}}+$$$$C\_{4}r^{-\frac{1}{2}m\_{1}+\frac{1}{2}m\_{5}-\frac{1}{2}\sqrt{m\_{1}^{2}-2m\_{1}m\_{5}-4m\_{1}v+m\_{5}^{2}+4m\_{5}v+4}}$$ |  |
| $$γ\left(r\right)=64(1+v)(ω^{2}(v-1)(-r\_{o}+r\_{i})r^{2}(-m\_{3}^{2}+\left(m\_{5}-m\_{1}-2\right)m\_{3}+\left(1+v\right)\left(m\_{5}-m\_{1}\right))$$$$\left(-m\_{3}^{2}+(m\_{5}-m\_{1}-4)m\_{3}+(v+2)m\_{5}-3+(-v-2)m\_{1}\right)ρ\_{e}$$$$-m\_{1}-m\_{2}-v-3)m\_{5}+(-m\_{2}+v-3)m\_{1}+m\_{2}^{2}+6m\_{2}+8)$$$$(-m\_{1}-m\_{3}+m\_{5})(\left(-r\_{o}+r\right)m\_{3}^{2}+\left(\left(-m\_{5}+m\_{1}+2\right)r+r\_{o}\left(m\_{5}-m\_{1}-4\right)\right)m\_{3}$$$$-\left(1+v\right)\left(m\_{5}-m\_{1}\right)r+r\_{o}(\left(v+2\right)m\_{5}-3+\left(-v-2\right)m\_{1}))E\_{e}T\_{0}α\_{e})r$$ |  |
| $$β\left(r\right)=\left(-r\_{o}+r\_{i}\right)\left(m\_{5}-2-m\_{1}-2m\_{3}+A\right)\left(m\_{5}-4-m\_{1}-2m\_{3}+A\right)E\_{e}$$$$\left(-6+m\_{5}+m\_{1}-2m\_{2}+A\right)\left(m\_{5}-2-m\_{1}-2m\_{3}-A\right)$$$$\left(m\_{5}-4-m\_{1}-2m\_{3}+A\right)\left(-6+m\_{5}+m\_{1}-2m\_{2}-A\right)$$ |  |

* مدل توزیع دما C :

|  |  |
| --- | --- |
| $u\_{r}\left(r\right)=v\_{0}\left(r\right)+\left(\frac{γ(r)}{β(r)}\right)$, | (34) |
| $$v\_{0}\left(r\right)=C\_{3}r^{-\frac{1}{2}m\_{1}+\frac{1}{2}m\_{5}+\frac{1}{2}\sqrt{m\_{1}^{2}-2m\_{1}m\_{5}-4m\_{1}v+m\_{5}^{2}+4m\_{5}v+4}}+$$$$C\_{4}r^{-\frac{1}{2}m\_{1}+\frac{1}{2}m\_{5}-\frac{1}{2}\sqrt{m\_{1}^{2}-2m\_{1}m\_{5}-4m\_{1}v+m\_{5}^{2}+4m\_{5}v+4}}$$ |  |
| $$γ\left(r\right)=64\left(1+v\right)(ω^{2}\left(v-1\right)\left(-r\_{o}+r\_{i}\right)$$$$\left(-m\_{3}^{2}+\left(m\_{5}-m\_{1}-2\right)m\_{3}+\left(1+v\right)\left(m\_{5}-m\_{1}\right)\right)r^{2}ρ\_{e}$$$$\left(-m\_{3}^{2}+(m\_{5}-m\_{1}-4)m\_{3}+(v+2)m\_{5}-3+(-v-2)m\_{1}\right)+(\left(r-r\_{i}\right)m\_{3}^{2}+$$$$\left(\left(-m\_{5}+m\_{1}+2\right)r+r\_{i}\left(m\_{5}-m\_{1}-4\right)\right)m\_{3}-\left(1+v\right)\left(m\_{5}-m\_{1}\right)r+$$$$r\_{i}\left(\left(v+2\right)m\_{5}-3+\left(-v-2\right)m\_{1}\right))E\_{e}(-m\_{1}-m\_{3}+m\_{5})$$$$(\left(m\_{1}-m\_{2}-v-3\right)m\_{5}+$$$$\left(-m\_{2}+v-3\right)m\_{1}+m\_{2}^{2}+6m\_{2}+8)T\_{0}α\_{e})r)$$ |  |
| $$β\left(r\right)=\left(-r\_{o}+r\_{i}\right)\left(m\_{5}-2-m\_{1}-2m\_{3}+A\right)\left(m\_{5}-4-m\_{1}-2m\_{3}+A\right)E\_{e}$$$$\left(-6+m\_{5}+m\_{1}-2m\_{2}+A\right)\left(m\_{5}-2-m\_{1}-2m\_{3}-A\right)$$$$\left(m\_{5}-4-m\_{1}-2m\_{3}+A\right)\left(-6+m\_{5}+m\_{1}-2m\_{2}-A\right)$$ |  |

*  مدل توزیع دما D :

|  |  |
| --- | --- |
| $u\_{r}\left(r\right)=v\_{0}\left(r\right)+\left(\frac{γ(r)}{β(r)}\right)$, | (35) |
| $$v\_{0}\left(r\right)=C\_{3}r^{-\frac{1}{2}m\_{1}+\frac{1}{2}m\_{5}+\frac{1}{2}\sqrt{m\_{1}^{2}-2m\_{1}m\_{5}-4m\_{1}v+m\_{5}^{2}+4m\_{5}v+4}}+$$$$C\_{4}r^{-\frac{1}{2}m\_{1}+\frac{1}{2}m\_{5}-\frac{1}{2}\sqrt{m\_{1}^{2}-2m\_{1}m\_{5}-4m\_{1}v+m\_{5}^{2}+4m\_{5}v+4}}$$ |  |
| $$γ\left(r\right)=64(1+v)r((r\_{o}+r\_{i})(-r\_{o}+r\_{i})r^{2}(m\_{3}^{2})$$$$+\left(\begin{array}{c}-\left(v-1\right)\left(-r\_{o}+r\_{i}\right)r^{2}\left(\begin{array}{c}-m\_{3}^{2}+\\\left(\begin{array}{c}-m\_{1}+m\_{5}-6)m\_{3}+(v+3)m\_{5}-8+(-v-3)m\_{1})\\(-m\_{3}^{2}+(-m\_{1}+m\_{5}-2\end{array}\right)m\_{3}\\+\left(1+v\right)\left(-m\_{1}+m\_{5}\right)\end{array}\right)ω^{2}\\ρ\_{e}\left(v-1\right)-\left(\begin{array}{c}\left(-r\_{o}^{2}+r^{2}\right)m\_{3}^{2}+\left(\left(m\_{1}+2-m\_{5}\right)r^{2}+r\_{o}^{2}\left(-m\_{1}-6+m\_{5}\right)\right)m\_{3}\\-\left(1+v\right)\left(-m\_{1}+m\_{5}\right)r^{2}+r\_{o}^{2}\left(\left(v+3\right)m\_{5}-8\left(-v-3\right)m\_{1}\right)\end{array}\right)E\_{e}\\\left(-m\_{1}-m\_{3}+m\_{5}\right)α\_{e}\left(\left(m\_{1}-m\_{2}-v-3\right)m\_{5}+\left(-m\_{2}+v-3\right)m\_{1}+m\_{2}^{2}+6m\_{2}+8\right)T\_{0}\end{array}\right)$$ |  |
| $$β\left(r\right)=\left(r\_{o}+r\_{i}\right)\left(-r\_{o}+r\_{i}\right)\left(m\_{5}-2-m\_{1}-2m\_{3}+A\right)$$$$\left(m\_{5}-4-m\_{1}-2m\_{3}+A\right)E\_{e}\left(-6+m\_{5}+m\_{1}-2m\_{2}+A\right)$$$$\left(m\_{5}-2-m\_{1}-2m\_{3}-A\right)\left(m\_{5}-4-m\_{1}-2m\_{3}+A\right)\left(-6+m\_{5}+m\_{1}-2m\_{2}-A\right)$$ |  |

**-5آنالیز عددی**

به منظور راستی­آزمایی حل معادلات در دیسک­های دوار به روش هموتوپی پرتوربیشن می­توان به مراجع [] مراجعه کرد و به دلیل محدودیت در ادامه برای حل­های به دست آمده فقط آنالیز عددی و ارائه نتایج انجام می­گیرد. از آنجاییکه تغییر خواص مکانیکی در امتداد شعاعی دیسک باید با خواص آلمینیم و زیرکونیوم در سطوح داخلی و خارجی هماهنگی داشته باشد، مقادیر پارامترهای$m\_{1}=0.4776, m\_{2}=0.4662, m\_{3}=-0.5175$ بر اساس خواص هندسی و مکانیکی متناظر با سطوح داخلی و خارجی دیسک در جدول­های 1 و 2 و هم چنین روابط موجود در جدول 3، لیست شده­اند. به علاوه دمای دیسک در سطح داخلی$T\_{o}=25℃$ در نظرگرفته شده است.

**-1-5توزیع تنش معادل فون میزز**

در این بخش توزیع تنش معادل فون میزز در امتداد شعاعی دیسک دوار مدرج تابعی به ازاء مقادیر متفاوتی از پارامتر تغییر ضخامت$m\_{5}$، مدل­های توزیع حرارت در دیسک و شرایط مرزی متفاوت برای دیسک مورد بررسی قرار می­گیرد. همان طور که می­دانیم تنش معادل فون میزز به عنوان معیاری برای شروع تغییر­شکل­های پلاستیک در مباحث آنالیز تنش و تحلیل تغییر­شکل­های الاستیک-پلاستیک اهمیت ویژه­ای دارد. برای رسیدن به این هدف، در شکل 4 توزیع تنش فون­میزز برای پارامتر ضخامت$m\_{5}=0$، مدل­های توزیع دما $A$ تا $D$ در داخل دیسک و شرایط مرزی متفاوت در سرعت زاویه­ای $ω=400^{rad}/\_{s}$رسم شده است. همان طور که مشخص است در این سرعت زاویه­ای، در بعضی از نمودارها مقدار تنش معادل فون­میزز از تنش تسلیم جزء فلزی سازنده دیسک ($300MPa$) عبور کرده است. برای دیسک با شرایط مرزی آزاد-آزاد و تحت قید شعاعی-آزاد، لبه داخلی ماکزیمم مقدار تنش معادل فون­میزز را دارد و در نتیجه برای این شرط مرزی، تسلیم از سطح داخلی دیسک آغاز می­گردد. در این شرایط مرزی، مدل توزیع حرارت $C$ دارای ماکزیمم تنش فون میزز در دیسک دوار است. همان طور که قبلا نیز در شکل 3 نشان داده شده است در این مدل توزیع دما از سطح داخلی تا سطح خارجی دیسک روندی افزایشی و خطی دارد. به علاوه می­توان مشاهده کرد تنش فون میزز برای مدل توزیع حرارت $A$ که در آن توزیع دما از سطوح داخلی تا خارجی دیسک ثابت است کمتر از مدل $C$ می­باشد. کمترین سطح تنش فون میزز برای مدل­های توزیع حرارت $B$ و $D$ به دست آمده است. در هر دو این مدل­ها دما از سطح داخلی دیسک تا سطح خارجی روندی نزولی دارد. در مدل $B$ تغییرات دما بین این دو سطح خطی است. اما در مدل $D$ تغییر غیر خطی و از مرتبه دو می­باشد. به عنوان نتیجه می­توان مشاهده کرد که در صوزت تغییرات غیر خطی دما بین دو سطح دیسک می­توان سطح تنش­های معادل مکانیکی-حرارتی در دیسک را کاهش داد. اما، برای شرط مرزی تحت قید شعاعی-تحت قید شعاعی، سطح خارجی دیسک دارای بیشترین تنش فون­میزز است و انتظار می­رود که محل آغاز جریان پلاستیک در دیسک دوار از این شعاع باشد. مدل­های توزیع دما $A$ و $C$ دارای مقادیر تقریبا یکسانی برای ماکزیمم مقدار تنش معادل فون میزز در سطح خارجی هستند. همین وضعیت را می­توان برای مدل های $B$ و $D$ نیز مشاهده کرد. در مورد تاثیر شرایط مرزی بر سطح تنش فون میزز، دیسک با شرط مرزی آزاد-آزاد دارای بالاترین سطح تنش معادل برای تمامی مدل­های توزیع دما در دیسک دوار است. بعد از آن دیسک با شرایط مرزی تحت قید شعاعی-آزاد قرار دارد. دیسک با شرایط مرزی تحت قید شعاعی-تحت قید شعاعی دارای کمترین سطح تنش معادل فون میزز در دیسک برای تمامی مدل­های توزیع دما در آن است. این بدان معنا است که در دیسک با این شرط مرزی تغییر شکل­های پلاستیک بسیار دیرتر نسبت به دو شرط مرزی دیگر آغاز می­شوند.

|  |
| --- |
|  |
| a: free-free |
|  |
| b: radially constrained-free |
|  |
| c: radially constrained- radially constrained |
| **Fig. 4** Von Mises equivalent stress distribution along the radial direction of disk for the thickness parameter$m\_{5}=0$ |
| **شکل 4** توزیع تنش معادل فون میزز در امتداد شعاعی دیسک برای پارامتر ضخامت $m\_{5}=0$ |

در ادامه می­توان توزیع تنش فون­میزز برای پارامتر ضخامت$m\_{5}=-0.5$، برای مدل­های توزیع دما $A$ تا $D$ در داخل دیسک و شرایط مرزی متفاوت در سرعت زاویه­ای $ω=400^{rad}/\_{s}$ در شکل 5 مشاهده کرد. همان­طور که مشخص است با افزایش پارامتر تغییر ضخامت از $m\_{5}=0$ در شکل 4 که معادل با دیسک ضخامت ثابت است، به $m\_{5}=-0.5$ در شکل 5، سطح تنش معادل فون میزز برای کلیه پارامترهای موجود در شکل کاهش یافته است. اما، کلیه مباحث ارائه شده برای تحلیل پارامترهای موثر بر تنش فون میزز برای $m\_{5}=0$ ، برای این پارامتر ضخامت نیز قابل قبول هستند. به علاوه می­توان مشاهده کرد که برای $m\_{5}=-0.5$ تاثیر خطی یا غیر خطی بودن مدل توزیع دما بر تغییرات تنش فون میزز بیشتر می­گردد. این تاثیر را می­توان در تفاوت منحنی­های رسم شده برای مدل­های توزیع دما $B$ و $D$ مشاهده کرد.

|  |
| --- |
|  |
| a: free-free |
|  |
| b: radially constrained-free |
|  |
| c: radially constrained- radially constrained |
| **Fig. 5** Von Mises equivalent stress distribution along the radial direction of disk for the thickness parameter$m\_{5}=-0.5$ |
| **شکل 5** توزیع تنش معادل فون میزز در امتداد شعاعی دیسک برای پارامتر ضخامت $m\_{5}=-0.5$ |

توزیع تنش فون­میزز برای پارامتر ضخامت$m\_{5}=-1$، برای مدل­های توزیع دما $A$ تا $D$ در داخل دیسک و شرایط مرزی متفاوت در سرعت زاویه­ای $ω=400^{rad}/\_{s}$ را می­توان در شکل 6 مشاهده کرد. همان­طور که مشخص است با افزایش پارامتر تغییر ضخامت از $m\_{5}=0$ در شکل 4 و $m\_{5}=-0.5$ در شکل 5 به $m\_{5}=-1$ در شکل 6، سطح تنش فون میزز برای کلیه پارامترهای موجود در شکل کاهش یافته است. برای این پارامتر تغییر ضخامت تغییرات تنش فون میزز در امتداد شعاعی دیسک نسبت به دو مقدار قبلی یکنواخت­تر شده است. به­دین معنا که تفاوت زیادی بین ماکزیمم و مینیمم این تنش معادل در سطوح داخلی و خارجی وجود ندارد. حتی برای یک سری از ترکیب پارامترهای موجود در شکل دیگر سطح داخلی یا خارجی دیسک دارای ماکزیمم مقدار تنش فون میزز نیست و این مقدار ماکزیمم را می توان در شعاع­هایی در میانه دیسک مشاهده کرد. اما، کلیه مباحث ارائه شده برای تحلیل پارامترهای موثر بر تنش فون میزز برای $m\_{5}=0$ ، برای این پارامتر ضخامت نیز قابل قبول هستند. به علاوه می­توان مشاهده کرد که برای $m\_{5}=-1$ تاثیر خطی یا غیر خطی بودن مدل توزیع دما بر تغییرات تنش فون میزز بسیار بیشتر نسبت به $m\_{5}=-0.5$ می­گردد. این تاثیر را می­توان در تفاوت بسیار زیاد منحنی­های رسم شده برای مدل­های توزیع دما $B$ و $D$ مشاهده کرد. در نتیجه اگر بخواهیم در دیسک دوار سطح تنش های مکانیکی-حرارتی را کاهش بدهیم بهتر است که از توزیع های غیر خطی دما (مرتبه دو و بالاتر) استفاده نماییم.

|  |
| --- |
|  |
| a: free-free |
|  |
| b: radially constrained-free |
|  |
| c: radially constrained- radially constrained |
| **Fig. 6** Von Mises equivalent stress distribution along the radial direction of disk for the thickness parameter$m\_{5}=-1$ |
| **شکل 6** توزیع تنش معادل فون میزز در امتداد شعاعی دیسک برای پارامتر ضخامت $m\_{5}=-1$ |

در نهایت در شکل 7 توزیع تنش فون میزز در امتداد شعاعی دیسک برای پارامتر تغییر ضخامت$m\_{5}=-0.5$، سرعت زاویه­ای $ω=400^{rad}/\_{s}$ و برای توزیع­های متفاوتی از دما و شرایط مرزی در سطوح داخلی و خارجی دیسک دوار آورده شده است. همان­طور که مشخص است در تمامی هر یک از مدل­های توزیع دما، دیسک با شرایط مرزی آزاد-آزاد ماکزیمم سطح تنش فون میزز را دارد و بعد از آن دیسک با شرایط مرزی تحت قید شعاعی- آزاد قرار می­گیرد. روند تغییرات تنش فون میزز برای این دو شرط مرزی مشابه می­باشد اما دیسک با شرایط مرزی تحت قید شعاعی-تحت قید شعاعی رفتار کاملا متفاوتی را از خود نشان می­دهد. در این شرط مرزی ماکزیمم مقدار تنش معادل در سطح خارجی و مینیمم مقدار آن در میانه دیسک رخ می­دهد. به علاوه دیسک با توزیع دما $C$ بیشتزین مقدار سطح تنش­های مکانیکی-حرارتی را دارد و بعد از آن توزیع دمای $A$ قرار می­گیرد. شرایط توزیع تنش­های مکانیکی-حرارتی برای دو توزیع دمای $B$ و $D$ تقریبا یکسان است.

با در نظر گرفتن تمامی پارامترهای موجود در شکل های 4 تا 7 می­توان نتیجه گرفت که دیسک با شرط مرزی تحت قید شعاعی-آزاد با تابع توزیع دمای از نوع $D$ دارای پایین ترین سطح تنش معادل فون میزز می­باشد.

|  |
| --- |
|  |
| a: Type A |
|  |
| b: Type B |
|  |
| c: Type C |
|  |
| d: Type D |
| **Fig. 3** Von Mises equivalent stress distribution along the radial direction of disk for different boundary conditions and the thickness parameter$m\_{5}=-0.5$ |
| **شکل 7** توزیع تنش معادل فون میزز در امتداد شعاعی دیسک برای شرایط مرزی متفاوت و پارامتر ضخامت $m\_{5}=-0.5$ |

**-6نتیجه گیری**

در این مقاله از روش تحلیلی هموتوپی پرتوربیشن براي بررسی توزیع تنش معادل فون میزز در دیسک­هاي دوار مدرج تابعی استفاده شد. تمامی خواص هندسی و مکانیکی دیسک دوار در راستای شعاعی آن متغیر در نظر گرفته شدند. در دیسک دوار 4 نوع متفاوت از توزیع دما در دیسک در نظر گرفته شد. معادله ناویر حاکم بر تغییر­شکل­های دیسک دوار که بر اساس تنش های مکانیکی-حرارتی نوشته شد و به کمک این روش حل گردید. آنالیز عددی نشان داد که دیسک با شرط مرزی حرارتی تحت قید شعاعی-تحت قید شعاعی تنش فون میزز کمتری را در مقایسه با شرط مرزی تحت قید شعاعی-آزاد و آن نیز مقادیر کمتری را نسبت به شرط مرزی آزاد-آزاد برای مقادیر متفاوتی پارامتر ضخامت$m\_{5}$ و برای تمامی توابع توزیع دما در دیسک تجربه می­کند. از این نکته می­توان استفاده کرد و با تعریف شرایط مرزی مناسب در سطوح داخلی و خارجی دیسک، سطح تنش­های حرارتی در آن را کنترل و بهینه کرد. در مورد شرایط مرزی، دیسک با دو شرط مرزی آزاد-آزاد و تحت قید شعاعی-آزاد رفتار تقریبا مشابهی را با افزایش پارامتر ضخامت$m\_{5}$ داشتند و در هر دو آنها با افزایش این پارامتر سطح تنش در دیسک کاهش پیدا می­کرد. اما، برای دیسک با شرایط مرزی تحت قید شعاعی-تحت قید شعاعی، رفتار دیسک متفاوت بود و هرچه پارامتر ضخامت افزایش پیدا کرد سطح تنش در دیسک افزایش یافت. نشان داده شد که توزیع غیر خطی دما در دیسک تنش­های حرارتی کمتری را در دیسک نسبت به توزیع خطی یا ثابت در دیسک ایجاد می­کند. با در نظر گرفتن تمامی پارامترها و متغیرها موجود در مدل ارائه شده، نهایتا مشخصات دیسک با کمترین مینیمم سطح تنش معادل فون میزز شناسایی گردید. در نهایت می­توان نتیجه گرفت که مدل تحلیلی ارائه شده به کمک روش هموتوپی پرتوربیشن به خوبی رفتار ترموالاستیک دیسک دوار مدرج تابعی را تحت انواع توابع توزیع دما در دیسک پیش بینی می­کند و این مدل قابل گسترش برای انواع پروفیل های ضخامت، شرایط بارگذاری­های پیچیده­تر مکانیکی-حرارتی و .... می­باشد.

**-7 مراجع**

[1] Gamer, U., “Tresca’s yield condition and the rotating solid disk,” Journal of Applied Mechanics, Vol. 50, pp. 676–8, 1983.

[2] You, L. H., You, X. Y., Zhang, J. J., Li, J., “ On rotating circular disks with varying material properties, ” Z Angew Math Phys, Vol. 58, pp. 1068–84, 2007.

[3] Kordkheili, S. A. H., Naghdabadi, R., “Thermoelastic analysis of a functionally graded rotating disk,” Composite Structructure, Vol. 79, pp. 508–16, 2007.

[4] Bayat. M., Saleem, M., Sahari, B. B., Hamouda, A. M. S., Mahdi, E., “Mechanical and thermal stresses in a functionally graded rotating disk with variable thickness due to radially symmetry loads,” International journal of pressure vessel and piping, Vol. 86, pp. 357–72, 2009.

[5] Eraslan, A. N., “A Class of Nonisothermal Variable Thickness Rotating Disk Problems Solved by Hypergeometric Functions,” Turkish J, Eng, Env, Sci, Vol. 29, pp. 241-269, 2005.

[6] Hojjati, M. H., Jafari, S., “Semi exact solution of elastic non uniform thickness and density rotating disks by homotopy perturbation and Adomian’s decomposition methods Part I: Elastic Solution,” International journal of pressure vessel and piping, Vol. 85, pp. 871-8, 2008.

[7] Hojjati, M. H., Jafari, S., “Semi-exact solution of elastic non-uniform thickness and density rotating disks. Part II: Elastic strain hardening solution,” International journal of pressure vessel and piping, Vol. 86, pp. 307-318, 2009.

[8] Jafari, S., Hojjati, M. H., Fathi, A., “Classical and modern optimization methods in minimum weight design of elastic rotating disk with variable thickness and density,” International journal of pressure vessel and piping, Vol. 92, pp.41-47, 2012.

[9] Farshi, B., Faezi, M. H., “Optimization of inhomogeneous rotating disk with non-gradient methods, ” In Persian, Modares technical and engineering journal, Vol. 38, pp. 107-120, 1388.

[10] Akbari Alashti, R., Jafari, S., Hosseinipour, S. J., “Experimental and numerical investigation of ductile damage effect on load bearing capacity of a dented API XB pipe subjected to internal pressure,” Engineering Failure Analysis, Vol. 47, pp. 208–228, 2015.

[11] Dai, T., Dai, H., “Thermo-elastic analysis of a functionally graded rotating hollow circular disk with variable thickness and angular speed,”Applied Mathematical Modeling, Vol. 40, pp. 7689-7707, 2016.

[12] Kaur, H., Gupta, N., Singh, S. B., “[Effect of thermal gradient on the deformation of a rotating composite disk](https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2214785319336557),” [Materials Today: Proceedings](https://www.sciencedirect.com/science/journal/22147853), In press, corrected proof, Available online 22 November 2019.

[13] He, J. H., “Homotopy perturbation technique,” Computational Methods Applied Mechanical Engineering, Vol. 178, pp. 257–62, 1999.

[14] He, J. H., “Homotopy perturbation method: a new nonlinear analytical technique,” Applied Mathematical Computation, Vol. 135, pp. 73–80, 2003.

[15] He, J. H., “Asymptotology by homotopy perturbation method,” Applied Mathematical Computation, Vol. 6, pp. 156-591, 2004.

1. Functionally graded material (FGM) [↑](#footnote-ref-1)
2. Gamer [↑](#footnote-ref-2)
3. Teresca [↑](#footnote-ref-3)
4. You et al [↑](#footnote-ref-4)
5. Naghd Abadi et al [↑](#footnote-ref-5)
6. Bayat [↑](#footnote-ref-6)
7. Haypergeometric Function [↑](#footnote-ref-7)
8. Jafari et al [↑](#footnote-ref-8)
9. Dai et al [↑](#footnote-ref-9)
10. Kaour et al [↑](#footnote-ref-10)
11. Volume fraction [↑](#footnote-ref-11)
12. 2 Zirconia ($Zro\_{2}$)

 [↑](#footnote-ref-12)