**بهینه­سازی وزن دیسک­های دوار مدرج تابعی با ضخامت متغیر تحت بارگذاری­های مکانیکی-حرارتی به کمک روش کاروش-کون-تاکر**

ساناز جعفری1\*

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه بجنورد، بجنورد

\* بجنورد، صندوق پستي 55111-94531، [s.jafari@ub.ac.ir](mailto:s.jafari@ub.ac.ir)

چکیده

ديسك­هاي دوار معمولاً در دماي بسيار بالايي كار مي­كنند و با سرعت زاويه­اي بسيار زيادي مي­چرخند. لذا كم كردن وزن دیسک در این دستگاه­ها مزاياي زيادي دارد و علاوه بر كاهش وزن خالص دستگاه، صرفه جويي اقتصادي را نيز در پي خواهد داشت. به علاوه در طی فرآیند بهینه­سازی وزن دیسک، برای رسيدن به توزيع مناسب تنش­ها، می­توان دیسک را غیر همگن و ماده تشکیل دهنده آن را مدرج تابعی در نظر گرفت. در این مقاله دیسک­های دوار برای داشتن مینیمم وزن در کنار حداکثر تنش معادل مجاز برای دوری از تغییر­شکل­های پلاستیک با اعمال شرایط بهینه سازی کاروش-کون-تاکر به کمک معادلات لاگرانژ بهینه­سازی می­شوند. در این ديسك­ دوار تمامی خواص هندسی و مکانیکی در راستای شعاعی دیسک تغییر می­کنند. رفتار الاستیک-سخت شونده خطی برای ماده مدرج تابعی دیسک در نظر گرفته می­شود و دیسک تحت بارگذاری­های مکانیکی-حرارتی قرار دارد. معیار تنش فون میزز به عنوان قید نامعادله­ای در بهینه­سازی وزن دیسک تعیین می­گردد تا دیسک سالم مانده و دچار خرابی نشود. برای محاسبه این تنش معادل از حل معادله ناویر حاکم بر دیسک به کمک روش تحلیلی هموتوپی پرتوربیشن استفاده شده است. در نهایت پارامترهای بهینه برای محاسبه مینیمم وزن دیسک با در نظر گرفتن دو قید نامعادله­ای حاکم به دست می­آید. نتایج نشان دادند که می­توان وزن دیسک را برای هر کدام از این قیود به ترتیب 14.8% و 5.6% کاهش داد. به علاوه این روش بهینه­سازی به دلیل داشتن شرایط لازم و کافی برای رسیدن به نقطه بهینه و عدم نیاز به محاسبات پیچیده بسیار کارآمد است.

**کلی**د‌واژگ**ان**

دیسک دوار، بهینه سازی، روش کاروش-کون-تاکر، روش هموتوپی پرتوربیشن، وزن

Weight optimization of functionally graded rotating disks with variable thickness under mechanical-thermal Loading using Karush-Kuhn-Tucker method

S. Jafari 1\*

1- Faculty of Engineering, University of Bojnord, Bojnord, Iran.

\* P.O.B. 94531-55111, Bojnord, Iran, [s.jafari@ub.ac.ir](mailto:s.jafari@ub.ac.ir)

Abstract

Rotating disks usually operate at high temperatures and rotate at high angular velocities. Therefore, reducing the weight of the disk in these devices has many advantages. Weight optimization reducing the net weight of the device, will also save money. Also, during the optimization process of the weight, to obtain a proper distribution of stresses, the disk can be considered as functionally graded material. In this paper, rotating disks for minimum weight are optimized by applying the Karush-Kuhn-Tucker optimization conditions to the Lagrangian equations. In the optimization process, the maximum equivalent stress to avoid plastic deformation is defined as a problem constraint. In this rotating disk, all the geometric and mechanical properties of the disk are changed radially. The linear elastic-hardening behavior is assumed for the definition of functionally graded material properties and the disk is subjected to mechanical-thermal loads. Von Mises stress criterion is defined as an unequal constraint in optimizing disk weight so that the disk remains intact and not damaged. To calculate this equivalent stress, the solution of the Navier equation is obtained by using the homotopy perturbation method as an analytical method. Finally, the optimal parameters for calculating the minimum disk weight are obtained by taking into account two different unequal constraints. The results showed that the weight of the disk can be reduced by 14.8% and 5.6% for each, respectively. It is shown that this optimization method is very efficient because it has sufficient conditions to reach the optimum point and does not require complex calculations.

Keywords

Rotating disk, Optimization, Karush-Kohn-Tucker method, Homotopy perturbation method, Weight

1. مقدمه

ديسك­هاي دوار[[1]](#footnote-1) قطعات مكانيكي هستند كه در طيف وسيعي از دستگاه­ها و تجهيزات مكانيكي مورد استفاده قرار مي­گيرند. با توجه به حرارت بالایی که در برخی موارد دیسک­ها در معرض آن قرار دارند، مواد سازنده آن­ها بایستی به گونه­ای انتخاب شوند تا قابلیت بالایی برای تحمل هر دو تنش­های مکانیکی و حرارتی داشته باشند. به همین دلیل استفاده از دیسک­هایی با پروفیل ضخامت غیر یکنواخت، ساخته شده از مواد مدرج تابعی[[2]](#footnote-2) توصیه می­گردد [15-1]. از طرفي دیگر بهينه­سازي پارامترهايي مانند وزن يكي از مواردي است كه در طراحي و ساخت ديسك­ها همواره مد نظر قرار مي­گيرد .با توجه به تفاوت بالای تنش موجود در مقاطع مختلف برای یک دیسک دوار با ضخامت یکنواخت، بهتر است از دیسک­هایی با ضخامت غیریکنواخت استفاده شود تا توزیع تنش مقداری­ اصلاح گردد.

مواد مدرج تابعی برای نخستین بار در سال 1984 در کشور ژاپن برای ساخت تجهیزات فضایی مورد استفاده قرار گرفتند. هدف از کاربرد این مواد به عنوان مواد کامپوزیتی غیر­همگن، افزایش کارایی اجزای مختلف سازه، کنترل تغییرشکل­ها و تنش­های ناخواسته به همراه رسیدن به خواص مطلوب این مواد مانند استحکام بالا، وزن کم، رسانایی خوب، مقاومت بالا در مقابل خوردگی و دمای زیاد است. در این مواد، خواص در هر نقطه توسط یک قانون اختلاط مناسب به صورت تابعی از خواص اجزاء تشکیل دهنده )معمولا فلز و سرامیک) تعریف می­شود.

مسأله بهينه سازي در دهه­هاي اخير در مسائل مهندسي مختلفي مطرح شده و در صنايع هوايي با توجه به اهميت خاص پارامترهايي مانند استحكام و لزوم پايين بودن وزن، اهميت خاصي دارد. يكي از زمينه هاي مهم بهينه سازي در صنايع هوايي ديسك توربين گاز است و در سال­هاي اخير كارهاي عددي و تحليل­هاي مهمي در اين زمينه انجام شده است.در زمينه بهينه­سازي ديسك­هاي دوار تحقیقات انجام شده محدود می­باشد به طوري كه در سال­هاي اخير مي­توان به چند نمونه آن اشاره نمود. ديسك­ها معمولاً به منظور داشتن مينيمم وزن وحداكثر تنش حاكم بر آن­ها مورد بهينه سازي مي­شوند. برای رسیدن به یک بهینه­سازی قابل اطمینان، با دقت بالا و هزینه کم، در این مقاله برای اولین بار از روش بهینه­سازی کاروش-کون-تاکر[[3]](#footnote-3) به همراه روش حل تحلیلی هموتوپی پرتوربیشن برای بهینه­سازی وزن دیسک­های دوار ساخته شده از مواد مدرج تابعی در حالت کلی و برای انواع متفاوتی از بارگذاری حرارتی و شرایط مرزی دیسک استفاده می­شود. مدل بهینه­سازی ارائه شده در این مقاله قابل ارائه برای بهینه­سازی دیسک­های دوار با هر فرمی از توابع تغییر خواص هندسی و مکانیکی و انواع بارگذاری­های پیچیده ترکیبی است.

از اولین تحقیقان انجام شده بر روی دیسک­های دوار می­توان به حل تحلیلی ديسك­های الاستیک-پلاستیک توسط گمر[[4]](#footnote-4) با استفاده از تئوري تسليم ترسكا[[5]](#footnote-5) اشاره کرد [1]. بعد از ایشان نیز دیسک­های دوار از جنبه­های متفاوتی مورد بررسی قرار گرفتند که در بیشتر آنها دیسک از ماده همگن با خواص مکانیکی مشخص ساخته شده بود. به عنوان نمونه اراسلان[[6]](#footnote-6) مدل محاسباتي را براي تحقيق بر روي تغيير­شكل پلاستیک ديسك­هاي دوار حلقوي با ضخامت متغير كه برروي شفت صلبي قرار گرفته­اند ارائه نمود. او از معيار تسليم فون­ميزز[[7]](#footnote-7) براي شبيه­سازي رفتار كرنش سختي غير خطي ماده استفاده کرد و سرعت زاويه­اي حد پلاستیک را براي اين مدل انتخابي در مقادير متفاوتي از پارامترهاي هندسي و سختي محاسبه کرد[2]. در زمینه دیسک­های دوار مدرج تابعی بیشتر تحقیقات بر حل معادلات میدان حاکم بر دیسک به کمک روش­های عددی و شبیه­سازی­های المان محدود استوار بوده است و تقریبا می توان بیان کرد که حل تحلیلی در این زمینه وجود ندراد. يو و همكارانش[[8]](#footnote-8) از نخستین محققانی بودند که استفاده مواد مدرج تابعی را برای ساخت دیسک­های دوار مطرح کردند و ديسك­هاي دوار از جنس فيبرهاي كامپوزيتي را در شرایط بارگذاری سرعت زاویه­ای ثابت و توزیع دمای یکنواخت مورد بررسي قرار دادند. ایشان فرض نمودند که مدول الاستیک، ضریب انبساط حرارتی و چگالی بر اساس تابعی توانی در امتداد شعاعی دیسک تغییر کند[3]. نقد­آبادی و همکاران[[9]](#footnote-9) راه­حل ترموالاستیکی نیمه تحلیلی برای دیسک­های دوار متقارن توپر و توخالی ساخته شده از مواد مدرج تحت شرایط تنش صفحه­ای ارائه دادند [4]. تغییر­شکل دیسک­های دوارمدرج تابعی با استفاده از تئوری تغییر­شکل برشی مرتبه اول توسط بيات[[10]](#footnote-10) و همکاران مورد مطالعه قرار گرفت. در اين مواد فرض بر اين است كه خواص مادي ديسك در راستاي ضخامت تغيير مي­نمايند [5].

در تمامي مواردي كه در بالا ذكر شد، ديسك­ها به صورت هم دما در نظر گرفته مي­شدند. در واقع هيچ گونه گراديان دمائي در ديسك وجود نداشت. اما اراسلان معادلات حاكم بر ديسك­هاي دوار را در هر دو حالت الاستیک و الاستیک-پلاستیک و براي پروفايل­هاي تغيير ضخامت مختلفي با فرض غير همدما بودن ديسك، به وسيله توابع فوق هندسي[[11]](#footnote-11) حل نمود[6]. حجتی و همکاران حل نیمه تحلیلی را برای بررسی توزیع تنش-کرنش در دیسک­هایی با ضخامت و چگالی متغیر به کمک روش­های هموتوپی پرتوربیشن و جداسازی آدمین ارائه کردند که این شکل از خواص مواد هم با وجود دامنه تغییرات محدود در گروه مواد مدرج تابعی قرار می­گیرند[7]. ایشان در ادامه این دیسک­ها را برای تغییر­شکل­های پلاستیک و انواع شرایط مرزی با درنظر گرفتن رفتار کرنش سختی خطی برای دیسک بررسی کردند[8]. در جدیدترین تحقیقات انجام گرفته بر روی دیسک های دوار، جعفری و همکاران تاثیر مدل­های خرابی مواد نرم را بر روی رفتار تغییر­شکلی پلاستیک دیسک­های دوار با ضخامت متغیر را بررسی کردند. ایشان نشان دادند که با در نظر گرفتن این مدل­ها در شبیه­سازی­ها می­توان پیش­بینی­های واقعی­تری از سرعت­های زاویه­ای حد پلاستیک کامل در دیسک­های دوار ارائه داد [9]. در ادامه آنالیز ترموالاستیک دیسک­های دوار مدرج با در نظرگرفتن پروفیل ضخامت و سرعت زاویه­ای متغیر توسط دای و همکاران[[12]](#footnote-12)، توسط روشی نیمه تحلیلی انجام شده است. ایشان نشان دادند که تغییرات در شعاع دیسک، سرعت زاویه­ای و گرادیان دمایی، ماکزیمم تغییر مکان در دیسک دوار را تحت تاثیر قرار می­دهد[10].

در زمینه بهینه­سازی دیسک­های دوار يك مدل از ديسك ناهمگن توسط جاهد[[13]](#footnote-13) و فرشي[[14]](#footnote-14) بهينه سازي شد. آن­ها با استفاده از روش خواص مادي متغيير تنش هاي حاكم بر ديسك را به دست آوردند و با استفاده از روشي خاص، به صورت تقسيم نمودن ديسك به مجموعه اي از حلقه­ها و تعيين ضخامت هر حلقه به نحوي كه تنش حاكم بر آن از تنش مجاز ديسك تجاوز ننمايد، ديسك را بهينه سازي نمودند. نتايج اين روش از پروفايل اوليه فرض شده مستقل بوده و نيازمند محاسبات پيچيده نمي باشد[11]. اين گروه در ادامه كار خود از روش رسم فرابيضوي[[15]](#footnote-15) براي به دست آوردن پروفايل بهينه ديسك و مينيمم نمودن وزن آن استفاده کردند[12]. از آنجائي كه اكثر ديسك­ها تحت سرعت دوراني بالا و گراديان­هاي دمائي بزرگ هستند، عموماً در بيشتر عمر مفيد خود در مرحله دوم خزشي قرار مي گيرند. فرشي و بيدابادي[[16]](#footnote-16) وزن ديسك بر مبناي تنش­هاي خزشي را بهینه سازی نمودند. در اين كار فرض بر اين است كه مينيمم وزن ديسك به شرط اينكه تنش خزشي معادل مرحله دوم در ديسك تحت گراديان دمائي بالا در تمامي نقاط ديسك نزديك به تنش مجاز آن باشد و البته از آن مقدار تجاوز ننمايد [13]. سيرگ و سورانا در زمینه دیسک­های متقارن تحت سرعت زاويه­اي بدون گردايان دمايي، ازالگوريتم­هاي خاصي براي بهينه­­سازي ديسك متقارن استفاده كرده اند [14]. پراگر و چن در همان زمان به طور جداگانه تحليل هايي را در زمينه بهينه سازي ديسك متقارن ارائه كرده اند[14]. همچنين در دهه اخير استفاده از روش هاي المان محدود در بهينه سازي ديسك دوار مطرح شده كه در اين زمينه می­توان به كارهاي چن چو و همكاران اشاره كرد كه براي بهينه سازي ديسك دوار از خاصيت المان محدود در بهينه سازي از روش جهت قابل قبول و روش برنامه ريزي خطي پي­درپي استفاده كردند[14]. اخیرًا جعفری و همکاران[[17]](#footnote-17) روش­های بهینه­سازی مدرن و کلاسیک را در مینیمم کردن وزن دیسک­های دوار بر اساس پارامتر تغییر ضخامت و چگالی در آنها ارائه کردند[15].

در این مقاله بهینه سازی وزن دیسک­های دوار ساخته شده از مواد مدرج تابعی با ضخامت متغیر به این شرط انجام می­گیرد که حداکثر تنش معادل فون میزز در دیسک از حد مجاز آن تجاوز ننماید و این در واقع همان قید نامعادله­ای تعریف شده در مدل­های بهینه­سازی می­باشد. از روش بهینه­سازی کاروش-کون-تاکر استفاده می­شود. دیسک دوار تحت تاثیر بارگذاری­های مکانیکی-حرارتی قرار دارد و توزیع تنش در آن به کمک روش تحلیلی هموتوپی پرتوربیشن وارد مدل بهینه سازی خواهد شد. دیسک در این تحقیق دارای پروفیل تغییر ضخامت در راستای شعاعی است، تو خالی می­باشد و شرط مرزی آزاد در آن نظر گرفته شده است. از آنجاییکه تغییر­شکل­های پلاستیک در دیسک­های دوار باعث ایجاد مشکلاتی در فرآیند کاری دیسک شده و مطلوب ما نمی­باشند، در طراحی­ها سعی بر این است که تا حد ممکن این پدیده به تعویق افتد. برای بررسی این موضوع، ماده دیسک از مواد مدرج تابعی ساخته شده است که خواص مکانیکی آن در راستای شعاعی دیسک تغییر می­کند. ماده مدرج تابعی دیسک در ناحیه تغییر­شکل­های پلاستیک از رفتار کرنش سختی خطی پیروی خواهد کرد. در نهایت پارامترهای بهینه برای مینیمم شدن وزن دیسک دوار محاسبه خواهند شد و پروفیل دیسک برای این حالت­های بهینه و حالت اولیه با هم مقایسه می­شوند. مطابق با شکل 1 برای دیسک دوار شرط مرزی آزاد در نظر گرفته شده است.

|  |
| --- |
|  |
| **Fig. 1** Rotary disk with free boundary conditions on the inner and outer surfaces |
| **شکل 1** دیسک دوار با شرایط مرزی آزاد در سطوح داخلی و خارجی |

**-2مدل سازی مکانیکی-حرارتی دیسک دوار**

**-1-2 خواص هندسی و مکانیکی دیسک دوار مدرج تابعی**

در این مقاله دیسک دوار حلقوی با ضخامت کم و پروفیل ضخامت متغیر در راستای شعاعی مدل می­گردد. شعاع دیسک در سطوح داخلی و خارجی به ترتیب با و نشان داده می­شود. دیسک­های دوار ضخامت متغیر را عموماً با در نظر گرفتن دستگاه مختصاتی استوانه­ای () مطابق شکل 2 مدل­سازی می­کنند. ديسك با سرعت زاويه­اي ثابت حول محور خود دوران می­کند و تحت تاثیر بارگذاری حرارتی متقارن نیز قرار دارد. از آنجایی كه نسبت شعاع به ضخامت در ديسك­هاي دوار زياد است، مي­توان با دقت قابل قبولي دیسک را نازک در نظر گرفت و فرض تنش صفحه­اي را در معادلات میدان اعمال کرد (). به علاوه پارامترهای ابعادی دیسک را می­توان در جدول 1 مشاهده کرد.

|  |
| --- |
|  |
| **Fig. 2** An example of disk with variable profiles in terms of and in a cylindrical coordinate system. |
| **شکل 2** نمونه­ای از پروفيل ديسك با ضخامت متغیر بر حسب پارامترهای و در دستگاه مختصات استوانه­ای |

**جدول 1** پارامترهای ابعادی دیسک دوار حلقوی

**Table 1** Dimensional parameters of annular rotating disk.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| شعاع داخلی () | شعاع خارجی () | ضخامت دیسک() |
| 0.2 m | 1 m | 0.1 m |

ديسك­هاي دوار با تغییر خواص مکانیکی در راستای شعاعی را می­توان از لحاظ ساختاری مدرج تابعی در نظر گرفت و با تعریف یک قانون اختلاط مناسب می­توان خواص مکانیکی دیسک را به عنوان تابعی از کسر حجمی، بین خواص سرامیک و فلز از لبه داخلی تا لبه خارجی تغییر داد. در این مقاله سطح داخلی دیسک از جنس آلمینیوم و سطح خارجی دیسک از جنس سرامیک زیرکونیا است. خواص مکانیکی این مواد در جدول 2 آورده شده است.

**جدول 2** خواص مکانیکی فلز و سرامیک در ماده مدرج تابعی دیسک دوار

**Table 2** Mechanical Properties of metal and ceramic in rotating disk functionally graded Material

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| زیرکونیا | آلمینیوم | خواص مواد |
| 151 | 70 | مدول یانگ () (GPa) |
| 0.3 | 0.3 | ضریب پواسان () |
| 5700 | 2700 | چگالی () () |
| 10 | 23 | ضریب انبساط حرارتی () () |
| --- | 300 | تنش تسلیم () (MPa) |
| --- | 35 | مدول تانژانت () (GPa) |

بر همین اساس می­توان تابع کسر حجمی و شاخص درجه­بندی را به صورت زیر تعریف کرد:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

مدول الاستیک، چگالی، ضریب انبساط حرارتی به همراه پروفیل تغییر ضخامت دیسک بر اساس رابطه (1)، بین سطوح داخلی و خارجی مطابق جدول 3 تغییر خواهند کرد و ضریب پواسان در دیسک ثابت در نظر گرفته می­شود. در روابط موجود در جدول 3، به ترتیب مقادیر مرجع برای مدول الاستیک، چگالی، ضریب انبساط حرارتی می­باشند و همان ضخامت ديسك در سطح خارجی () است. به علاوه پارامترهای به عنوان پارامترهای شاخص درجه بندی این خواص مکانیکی در ساختار مواد مدرج تابعی و به عنوان پارامتر تغییر ضخامت دیسک شناخته می­شوند. از آنجاییکه تغییر خواص مکانیکی در امتداد شعاعی دیسک باید با خواص آلمینیم و زیرکونیوم در سطوح داخلی و خارجی هماهنگی داشته باشد، مقادیر پارامترهای بر اساس خواص هندسی و مکانیکی متناظر با سطوح داخلی و خارجی دیسک در جدول­های 1 و 2 و هم چنین روابط موجود در جدول 3، لیست شده­اند.

**جدول 3** خواص مکانیکی مواد مدرج تابعی با تعریف پارامترهای موجود در آن­ها

**Table 3** Mechanical properties and parameters in functionally graded materials.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| مدول الاستیک | چگالی | ضریب انبساط حرارتی | پروفیل ضخامت |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

**-2-2تنش معادل در دیسک دوار مدرج تابعی**

در این مقاله رفتار مواد مدرج تابعی برای تغییر­شکل­های الاستیک-پلاستیک به صورت کرنش سختی خطی تعریف شده است. از نقطه نظر شروع تسلیم در مواد مدرج تابعی، زمانی که تنش معادل فون میزز در دیسک به تنش تسلیم مواد سازنده دیسک برسد، دیسک وارد تغییر­شکل­های پلاستیک می­شود و سرعت زاویه­ای معادل با آن به عنوان سرعت زاویه­ای حد الاستیک نامگذاری می­گردد. تنش معادل فون میزز در دیسک دوار حلقوی ساخته شده از مواد مدرج تابعی طبق رابطه زیر محاسبه می شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2) |

در این رابطه و به ترتیب تنش های شعاعی و محیطی در دیسک می­باشند. از آنجاییکه بارگذاری، هندسه و شرایط مرزی در دیسک دوار متقارن است، تنش برشی در دیسک تشکیل نمی­شود و این تنش­ها، همان مولفه­های اصلی در دیسک هستند.

**-3-2تعریف تابع توزیع دما در دیسک**

در این مقاله دیسک دوار حلقوی مدرج تابعی تحت میدان حرارتی قرار دارد که می تواند در امتداد شعاعی دیسک تغییر می­کند. با در نظر گرفتن تقریب یک بعدی از توزیع دما، در این مقاله از تابع توزیع دما ثابت در داخل دیسک دوار () استفاده می­شود. در این رابطه دما در سطح داخلی دیسک است که مشخص و ثابت می­باشد ().

**-4-2مدل سازی مکانیکی دیسک دوار [7-9]**

مطابق با شکل 2، دیسک دوار حلقوی مدرج تابعی با شعاع داخلی و شعاع خارجی تحت بارگذاری­های متقارن مکانیکی و حرارتی( ) قرار دارد. در مسئله مورد بررسی قید حاکم بر مدل بهینه سازی بر اساس تنش معادل فون میزز نوشته می شود. پس در ادامه آنالیز تنش­های ترموالاستیک در دیسک دوار با نوشتن معادلات تعادل حاکم بر دیسک به فرم ناویر، بر اساس روابط حاکم بر تغییر­شکل­های کوچک، حالت تنش ضفحه­ای و اعمال فرض تقارن محوری انجام می­گیرد. بر این اساس تمامی متغیرهای موجود در معادلات ناویر مستقل از موقعیت محیطی می­باشند، مولفه تنش برشی () از معادلات حذف خواهد شد و مولفه تنش در راستای ضخامت () نیز برابر صفر است. با در نظر گرفتن المانی از دیسک دوار به همراه تمامی نیروهای داخلی در امتداد شعاعی () و محیطی ()، نوشتن معادلات تعادل در این دو راستا و اعمال فرضیات بالا به این معادلات، نهایتا معادله تعادل حاکم بر دیسک به فرم زیر خلاصه می شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3) |

در این روابطه تابع توزیع چگالی در دیسک، سرعت زاویه­ای می­باشند. به علاوه و به ترتیب مولفه­های شعاعی و محیطی تنش عمودی در دیسک است. با در نظر گرفتن شرط تقارن محوری، روابط کرنش-تغییر مکان در دیسک دوار به صورت زیر تعریف می­شوند:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4) |
|  | (5) |

از آنجاییکه دیسک تحت تغییرات دمایی قرار دارد بایستی کرنش حرارتی نیز به کرنش­های عمودی در هر راستا اضافه گردد. بیانگر کرنشی است که از تغییر دما در دیسک ایجاد می­گردد. این کرنش بر اساس تابع تغییر دما حاکم بر دیسک () در راستای شعاعی تغییر می­کند و به کمک تابع ضریب انبساط حرارتی به شکل زیر قابل محاسبه است:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6) |

برای رسیدن به فرم ناویر معادلات تعادل، بایستی مولفه­های تنشی حاکم بر دیسک دوار در رابطه (3) جایگذاری شوند. در همین راستا می­توان این مولفه­های تنش را بر اساس کرنش های عمودی و حرارتی، به کمک روابط زیر بیان کرد:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7) |
|  | (8) |

با جایگزینی روابط بالا در معادله تعادل (3)، معادله ناویر حاکم بر دیسک­های دوار بر اساس تغییر­مکان در راستای شعاعی دیسک () به دست می­آید:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9) |

همان طور كه مشاهده مي­شود اين يك معادله ديفرانسيل غير خطي از مرتبه دو و غير همگن است و در آن مراتب متفاوتی از مشتقات تابع مجهول وجود دارد. در این رابطه تابع وجود دارد که مطابق با تابع تعریف شده در این معادله دیفرانسیل جایگذاری می­گردد. به علاوه تغییرات خواص مکانیکی و هندسی مطابق با روابط موجود در جدول 3 را می­توان در این معادله مشاهده کرد. حل تحلیلی این معادله بسیار سخت است، اما برای اولین بار در این مقاله معادله معادله ناویر حاکم بر تغییر­شکل­های دیسک دوار به همراه تاثیر تغییرات دمایی در آن به روش تحلیلی هموتوپی پرتوربیشن حل خواهند شد.

**-5-2معرفی روش­ تحلیلی هموتوپی پرتوربیشن [16-18]**

در این بخش اساس روش هموتوپی پرتوربیشن بیان می­گردد. برای نشان دادن اصول این روش، معادله دیفرانسیلی غیرخطی زير را در نظر مي­گيريم:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (10) |

با شرایط مرزی:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (11) |

در روابط بالا، تابع مجهول، یک عملگر دیفرانسیلی کلی، تابع تحلیلی معلوم، یک عملگر مرزی و مرز حوزه می­باشد. یکی از مهمترین مراحل حل به این روش، یافتن بخش­های خطی و غیر خطی عملگر است و می­توان این عملگر را به طور کلی به دو قسمت خطی و غیرخطی تجزیه کرد. بنابراین معادله(10)، را می­توان بصورت زیر نوشت:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (12) |

بر اساس تکنیک هموتوپی، می­توان تابع هموتوپیرا به نحوی تشکیل داد که معادلات زیر را ارضاء کند:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (13) |

که و یک حدس اولیه از معادله (12) می­باشد که بطور کلی شرایط مرزی را ارضاء می­کند. بدیهی است که از معادله (13) داریم:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (14) |
|  | (15) |

واضح است که وقتی باشد، معادله (13) به یک معادله خطی و در هنگامی که باشد، به معادله غیرخطی اولیه تبدیل می­گردد. بنابراین فرآیند افزایش یکنواخت از صفر به یک، همان فرآیند تبدیلبهمی­باشد که این فرآیند اساس روش هموتوپی است. فرض اساسی در این روش، این است که جواب معادله (13) را به توان به صورت یک سری توانی از نوشت:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (16) |

برای شروع حل بایستی معادله (16) را در معادله (13) جایگزین کرد و رابطه به دست آمده را بر حسب توان­های مختلف () مرتب نمود. هر یک از ضرایب توان­های یک معادله دیفرانسیل بر اساس متغیر خواهند بود که بایستی حل شوند و در نهایت با حد زیر جواب تقریبی معادله (12) را بدست آورد:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (17) |

سری فوق، در اکثر موارد به جواب همگرا می­شود، ولی سرعت همگرایی به جمله غیرخطی بستگی دارد.

**-1-5-2حل معادله ناویر به روش تحلیلی هموتوپی پرتوربیشن**

فرم نهایی معادله ناویر حاکم بر اساس تغییر­شکل مجهول در دیسک دوار مدرج تابعی، با جایگزینی توابع مدول الاستیک، چگالی، ضریب انبساط حرارتی و پروفیل ضخامت در رابطه (9) به صورت زیر می باشد:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (18) |

برای شروع حل به روش هموتوپی پرتوربیشن، ابتدا بخش­هاي خطي و غير خطي معادله (18) با در نظر گرفتن شرط همگرایی، به صورت زیر تعیین می­شوند:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (19) |
|  | (20) |
|  | (21) |

حال بایستی تابع هموتوپي مطابق با رابطه (13) ایجاد شود. در اين معادله به عنوان تابع مجهول و به عنوان تابع شرايط اوليه معادله ديفرانسيل تعریف می­شود كه خود نیز مجهول است:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (22) |
|  | (23) |

در مرحله بعدي تابع مطابق با رابطه (16) تعریف می­شود. با جايگزين نمودن معادلات(23-22) به همراه تابع در معادله هموتوپی (13)، بایستی معادله به دست آمده را بر حسب توان­هاي مرتب کرد و بعد این ضرایب که خود معادلات دیفرانسیل هستند را حل نمود:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (24) |
|  | (25) |
|  | (26) |

براي محاسبه تابع مجهول بايستي معادلات ديفرانسيلي بالا حل شوند. براي حل معادله (24) فرض مي­كنيم كه باشد:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (27) |

با جايگذاري معادله (27) در رابطه (25) و حل آن بر حسب داريم:

|  |  |
| --- | --- |
| (28) | , |
| , | |
|  | |
|  | |
|  | |

به طور مشابه براي معادله(26) داريم:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (29) |

براي يافتن تابع مجهول لازم است كه معادلات (29-27) در معادله (17) جايگزين شوند و به طور همزمان و ميل داده شود. اين كار به معناي يافتن پاسخ براي معادله ديفرانسيل حاكم بر دیسک­های دوار مدرج تابعی تحت بارگذاری مکانیکی-حرارتی است. بنابراين حل اين معادله برابر است با:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (30) |

در معادله (30) پارامترهاي و مجهول بوده و بر اساس شرايط مرزي حاکم بر دیسک تعيين مي­شوند. در شرایط مرزی آزاد تنش های شعاع در سطوح داخلی و خارجی دیسک برابر صفر هستند.

**-3 بهینه سازی دیسک دوار مدرج تابعی**

**-1-3 تعریف تابع هدف**

همان طور که بیان شد هدف از این مقاله مینیمم نمودن وزن دیسک­های دوار با در نظر گرفتن محدودیت برای حداکثر تنش معادل در آن­ها است. بنابراین در ابتدا رابطه حاکم بر وزن دیسک­های دوار به منظور تعریف تابع هدف محاسبه می شود. به طور كلي وزن يك دیسک برابر است با:

|  |  |
| --- | --- |
| (31) |  |

در اين رابطه حجم كل دیسک دوار و وزن مخصوص ديسك مي­باشد. بر اساس روابط موجود در جدول 3 داریم:

|  |  |
| --- | --- |
| (32) |  |

حجم يك ديسك دوار حلقوي به روش غشاها و برای دو منحنی و که به دو خط عمودی و محدود شده است برابر است با:

|  |  |
| --- | --- |
| (33) |  |

حال با در نظر گرفتن شکل 1، حجم دیسک برابر است با حجم حاصل از دوران ناحیه بین دو منحنی و محدود به دو خط عمودی و برابر است با:

|  |  |
| --- | --- |
| (34) |  |
|  |  |
|  |  |

بر همین اساس جزء دیفرانسیلی حجم را می توان به صورت زیر تعیین کرد:

|  |  |
| --- | --- |
| (35) |  |

حال با جایگذاری این روابط معلوم در رابطه وزن دیسک (31) می­توان تابع هدف مدل بهینه­سازی را به فرم زیر تعیین کرد:

|  |  |
| --- | --- |
| (36) |  |

همان­طور که از رابطه (36) مشخص است وزن دیسک دوار تابع پارامتر تغییر ضخامت **است. در نتیجه برای** یافتن مینیمم وزن دیسک که همزمان کمترین سطح تنش را در دیسک ایجاد کند بایستی مقادیر بهینه این پارامتر محاسبه شود.

**-2-3تعریف قيد اعمالي بر مسئله**

قيد حاكم بر مسئله به اين صورت بيان مي­شود كه تنش حداكثر وان ميززي حاكم بر ديسك از تنش تسليم ماده تجاوز ننمايد. مطابق با توضيحاتي كه قبلا داده شد، تنش فون ميززي در ديسك برابر با رابطه (2) است. با استفاده از اين رابطه، حل معادله ناویر حاکم بر دیسک دوار در بخش قبل برای محاسبه و معادلات تنش­– جابجايي مي­توان تنش­هاي شعاعي و مماسي را در هر شعاع دلخواهی از دیسک محاسبه کرد و در رابطه مربوط به تنش فون ميزز جايگزين نمود. با انجام اين كار تابع ارائه دهنده تنش فون ميززي بر حسب ثوابت مجهول و هم چنين متغير به دست مي­آيد. شرايط مرزي حاكم بر ديسك براي تعيين ثوابت مجهول به صورت شرايط مرزي آزاد فرض مي­شود. در اين مقاله وزن ديسك در دو حالت قیدی متفاوت بهينه سازي می­گردد:

* **قید مدل**  : تنش فون ميززي حاكم بر دیسک كمتر از تنش تسليم ماده باشد ()
* **قید مدل** : در این حالت برای طراحی دیسک ضریب اطمینان در نظر گرفته شده است و در نتیجه تنش فون ميززي حاكم بر دیسک بایستی كمتر از تنش تسليم ماده باشد ()

**-3-3 روش بهینه سازی کاروش-کون-تاکر [15]**

اين روش از دسته روش­هاي حل مسائل بهینه سازی غير خطي[[18]](#footnote-18) تحت قيد مي­باشد. به طور كلي مسائل غير خطي بسته به نوع قيدي كه بر آن­ها اعمال مي­شود به دو دسته تقسيم مي­شوند. دسته اول مسائلي هستند كه تحت قيود داراي مقدار مشخص قرار مي­گيرند كه تحت عنوان قيود مقداري خوانده مي­شوند و دسته بعدي مسائلي هستند كه تحت قيد داراي مقدار مشخصي نيستند و به عنوان قيود نامعادله­اي بيان مي­شوند. مطابق با توضیحات ارائه شده در بخش­های قبل، در این مقاله وزن دیسک تحت قید تنش فون میزز با حالت نامعادله­ای بهینه­سازی خواهد شد. به طور كلي مسائل بهینه سازی غير خطي شامل قيد و متغيير مي­توانند به صورت زير بيان شوند:

مینیمم نمودن تابع هدف:

تحت قیود مقداری و نامعادله ای:

روش بهینه­سازی کاروش-کون-تاکر در بردارنده شرایط خاصی است که به معادلات لاگرانژ اعمال می­شود و به این وسیله بهینه­سازی تحت قید مشخص انجام می گیرد. در نتیجه به عنوان ضریب لاگرانژ برای قيد­هاي نامعادله­ای و به عنوان این ضریب برای قيد­هاي مقداري در نظر گرفته مي­شود. با این تعریف می­توان تابع لاگرانژ به صورت زير تعریف کرد. در ادامه شرايط کاروش-کون-تاکر به این معادله اعمال می­گردد.

|  |  |
| --- | --- |
| (37) |  |

در این رابطه بردار متغیرهای طراحی، تابع هدف می­باشد. حال اگر به عنوان نقطه بهینه مسئله بر روی یکی از سطوح قیدی قرار گیرد، قید مورد نظر به عنوان قید فعال شناخته می­شود. در نتیجه می­توان شرایط بهینه­سازی کاروش-کون-تاکر را به صورت زیر بیان کرد:

|  |  |
| --- | --- |
| (38) |  |
|  |  |

در این روابط بردار ضرایب لاگرانژ برای قیود مقداری و بردار ضرایب لاگرانژ برای قیود نامعادله­ای است. از آنجاییکه شرایط کاروش-کون-تاکر لازم هستند اما کافی نیستند، هر نقطه­ای که این شرایط را ارضاء نماید حل بهینه مسئله نخواهد بود. در این شرایط در صورتی نقطه بهینه به دست آمده از شرایط کاروش-کون-تاکر قابل قبول است که اگر و فقط اگر ماتریس هیسین[[19]](#footnote-19) برای قیود فعال مسئله دارای مقداری مثبت باشد. این ماتریس به صورت زیر تعریف می­گردد:

|  |  |
| --- | --- |
| (39) | , |

در نهایت می­توان مطالب بیان شده را به صورت زیر خلاصه کرد:

مدل:

مینیمم کردن تابع تحت قیود

|  |
| --- |
| تابع لاگرانژ: |

شرایط کاروش-کون-تاکر:

|  |
| --- |
|  |

پس از حل مسئله مورد نظر توسط اين روش اگر باشد نقطه به دست آمده مينيمم بوده و اگر باشد آن نقطه ماكزيمم تابع هدف مي­باشد و در صورت آن نقطه، نقطه زيني مي باشد.

**-1-3-3بهينه سازي وزن ديسك تحت قيد مدل A**

در اينجا مسئله همان مينيمم نمودن وزن ديسك به عنوان تابع هدف تحت قيد نامعادله­اي است كه در آن تنش فون ميزز بايستي كمتر از تنش تسليم ماده باشد قرار دارد و عبارت كامل آن به صورت زير بيان مي­شود:

مدل:

مینیمم کردن تابع

تحت قید نامعادله ای :

از آنجائي كه وزن ديسك داراي بعد نيوتن () و تنش فون ميزز بعد پاسكال() است و اين دو داراي ابعاد مختلفي مي­باشند، در ابتدا اين دو پارامتر به منظور انجام بهينه­سازي بي بعد مي­شوند. براي بي بعد نمودن وزن ديسك، از وزن ديسكي فرضي كه داراي حداكثر پارامتر تغيير ضخامت استفاده مي­شود. براي بي بعد كردن تنش فون­ميززي نيز از تنش تسليم ماده فلزی دیسک () استفاده مي گردد. بنابراين داریم:

|  |  |
| --- | --- |
| (40) |  |
| (41) |  |

در اين دو رابطه وزن ديسك به صورت بي بعد و تنش فون­ميززي بدون بعد مي­باشد. در شکل 3 توزیع تنش فون میزز در امتداد شعاعی دیسک با شرایط مرزی آزاد-آزاد در سطوح داخلی و خارجی، با درنظر گرفتن تابع توزیع دما در دیسک و بر اساس حل به دست آمده از روش هموتوپی پرتوربیشن نشان داده شده است. همان طور که در این شکل مشخص است ماكزيمم مقدار در سطح داخلی دیسک () رخ مي­دهد. بنابراين می­توان قید مسئله را بر اساس حداکثر تنش فون ميزز كه در این شعاع رخ مي­دهد ساده­سازی کرد:

|  |  |
| --- | --- |
| (42) |  |

حال می توان مسئله را با استفاده از شرايط کاروش-کون-تاکر براي حالت قيد­هاي نامعادله­اي فرموله کرد:

مدل:

مينيمم نمودن

قید نامعادله­ای:

تابع لاگرانژ:

حال به تابع لاگرانژ شرایط کاروش-کون-تاکر اعمال می شود:

|  |
| --- |
|  |

با استفاده از اين روابط به معادلات زير خواهیم رسید:

|  |  |
| --- | --- |
| (43) |  |

از حل همزمان اين معادلات به ازاء می توان مقدار بهینه پارامتر ضخامت را که در آن دیسک برای این سرعت زاویه­ای دارای مینیمم مقدار وزن است را یافت. مقدار بهینه پارامتر به همراه سایر مشخصات دیسک به دست آمده از این مدل بهینه سازی در جدول 4 لیست شده­اند. به علاوه در شكل 5 پروفايل تغيير ضخامت ديسك جهت نشان دادن اثر بهينه سازي انجام شده بر روي پروفايل ديسك با مقدار ماکزیمم پارامتر رسم شده است.

|  |
| --- |
|  |
| **Fig. 4** Von Mises stress distribution in disk with free-free boundary conditions under mechanical-thermal loading for different values of thickness parameter |
| **شکل 4** توزیع تنش فون میزز در دیسک با شرایط مرزی آزاد-آزاد تحت بارگذاری مکانیکی-حرارتی برای مقادیر متفاوتی از پارمتر ضخامت |

**-2-3-3بهينه سازي وزن ديسك تحت قيد مدل B**

در اينجا مسئله همان مينيمم نمودن وزن ديسك به عنوان تابع هدف تحت قيد نامعادله­اي است كه در آن تنش فون ميزز به دلیل در نظر گرفتن ضریب اطمینان در طراحی بايستي كمتر از تنش تسليم ماده باشد قرار دارد و عبارت كامل آن به صورت زير بيان مي­شود:

مدل:

مينيمم نمودن

قید نامعادله ای:

تابع لاگرانژ:

حال به تابع لاگرانژ شرایط کاروش-کون-تاکر را اعمال می شود:

|  |
| --- |
|  |

با استفاده از اين روابط به معادلات زير خواهیم رسید:

|  |  |
| --- | --- |
| (44) |  |

از حل همزمان اين معادلات به ازاء می توان مقدار بهینه پارامتر ضخامت را که در آن دیسک برای این سرعت زاویه ای دارای مینیمم مقدار وزن است را یافت. مقدار بهینه پارامتر به همراه سایر مشخصات دیسک به دست آمده از این مدل بهینه سازی نیز در جدول 4 لیست شده اند. به علاوه در شكل 5 پروفايل تغيير ضخامت ديسك جهت نشان دادن اثر بهينه سازي انجام شده بر روي پروفايل ديسك با مقدار ماکزیمم پارامتر رسم شده است.

**جدول 4** پارامترهای بهینه برای دو قید نامعادله ای َ و

**Table 4** Optimal parameters for two unequal constraints and .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| حداکثر تنش فون میزز | درصد کاهش وزن دیسک | وزن دیسک | مقدار بهینه |  |
| 300Mpa | 14.8% | 37.007KN | -0.6735 | قید مدل A |
| 270MPa | 5.6% | 40.959KN | -0.8854 | قید مدل B |

|  |
| --- |
|  |
| **Fig. 5** Disk thickness profiles for optimal thickness parameter according to constraintsand. |
| **شکل 5** پروفایل تغییر ضخامت دیسک برای برای مقادیر بهینه پارامتر ضخامت بر اساس قیود و |

**-6نتیجه گیری**

در این مقاله از روش بهینه سازی کاروش-کون-تاکر به همراه حل تحلیلی هموتوپی پرتوربیشن براي بهینه سازی وزن دیسک های دوار مدرج تابعی تحت قید تنش معادل فون میزز استفاده شد. تمامی خواص هندسی و مکانیکی دیسک دوار در راستای شعاعی آن متغیر در نظر گرفته شدند. دیسک دوار همزمان تحت بارگذاری های مکانیکی-حرارتی قرار داشت و توزیع دما بین سطوح داخلی و خارجی دیسک ثابت در نظر گرفته شد. معادله ناویر حاکم بر تغییر­شکل­های دیسک دوار که بر اساس تنش های مکانیکی-حرارتی نوشته شد و به کمک این روش حل گردید. شرایط مرزی دیسک در هر دو سطوح داخلی و خارجی آزاد در نظر گرفته شد. شرایط بهینه سازی کاروش –کون-تاکر بر معادلات لاگرانژ اعمال گردید و بر اساس آن مقادیر بهینه پارامتر ضخامت در دیسک برای دو قید نامعادله­ای محاسبه شد. برای قید مدل ، میزان وزن دیسک برای پارامتر بهینه نسبت به دیسک مبنا به میزان تقریبی 14.8% کاهش پیدا کرد. در قید مدل با در نظر گرفتن ضریب اطمینان در طراحی دیسک، وزن به میزان 5.6% کاهش یافت. بنابراین از مدل بهینه سازی ارائه شده در این مقاله می­توان استفاده کرد و با تعریف شرایط مرزی مناسب در سطوح داخلی و خارجی دیسک، همزمان با کنترل سطح تنش­های حرارتی در دیسک، وزن آن را نیز بهینه نمود. در نهایت می­توان نتیجه گرفت که این مدل بهینه سازی به کمک روش هموتوپی پرتوربیشن به خوبی رفتار ترموالاستیک دیسک دوار مدرج تابعی را تحت انواع توابع توزیع دما در دیسک پیش بینی می­کند و این مدل قابل گسترش برای انواع بهینه سازی وزن در پروفیل های ضخامت، شرایط بارگذاری­های پیچیده­تر مکانیکی-حرارتی و .... می­باشد.

**-7مراجع**

[1] Gamer, U., “Tresca’s yield condition and the rotating solid disk,” Journal of Applied Mechanics, Vol. 50, pp. 676–8, 1983.

[2] Eraslan, A. N., Orcan, Y., “Elastoplastic analysis of nonlinearly hardening variable thickness annular disks under external pressure,” Mechanics Research Communications, Vol. 32, pp. 306–315, 2005.

[3] You, L. H., You, X. Y., Zhang, J. J., Li, J., “ On rotating circular disks with varying material properties, ” Z Angew Math Phys, Vol. 58, pp. 1068–84, 2007.

[4] Kordkheili, S. A. H., Naghdabadi, R., “Thermoelastic analysis of a functionally graded rotating disk,” Composite Structructure, Vol. 79, pp. 508–16, 2007.

[5] Bayat. M., Saleem, M., Sahari, B. B., Hamouda, A. M. S., Mahdi, E., “Mechanical and thermal stresses in a functionally graded rotating disk with variable thickness due to radially symmetry loads,” International journal of pressure vessel and piping, Vol. 86, pp. 357–72, 2009.

[6] Eraslan, A. N., “A Class of Nonisothermal Variable Thickness Rotating Disk Problems Solved by Hypergeometric Functions,” Turkish J, Eng, Env, Sci, Vol. 29, pp. 241-269, 2005.

[7] Hojjati, M. H., Jafari, S., “Semi exact solution of elastic non uniform thickness and density rotating disks by homotopy perturbation and Adomian’s decomposition methods Part I: Elastic Solution,” International journal of pressure vessel and piping, Vol. 85, pp. 871-8, 2008.

[8] Hojjati, M. H., Jafari, S., “Semi-exact solution of elastic non-uniform thickness and density rotating disks. Part II: Elastic strain hardening solution,” International journal of pressure vessel and piping, Vol. 86, pp. 307-318, 2009.

[9] Akbari Alashti, R., Jafari, S., Hosseinipour, S. J., “Experimental and numerical investigation of ductile damage effect on load bearing capacity of a dented API XB pipe subjected to internal pressure,” Engineering Failure Analysis, Vol. 47, pp. 208–228, 2015.

[10] Dai, T., Dai, H., “Thermo-elastic analysis of a functionally graded rotating hollow circular disk with variable thickness and angular speed,”Applied Mathematical Modeling, Vol. 40, pp. 7689-7707, 2016.

[11]- Jahed, H., Bidabadi, J., “Minimum weight design of inhomogeneous rotating discs, ” International Journal of Pressure Vessels and Piping, Vol. 82, pp. 35–41, 2005.

[12]- Farshi, B., Jahed, H., Mehrabian, A., “Optimum design of inhomogeneous non-uniform rotating discs, ” Computers and Structures, Vol. 82, pp. 773–779, 2004.

[13]- Farshi, B., Bidabadi, J., “Optimum design of inhomogeneous rotating discs under secondary creep, ” International Journal of Pressure Vessels and Piping, Vol. 85, pp. 507–515, 2008.

[14] Farshi, B., Faezi, M. H., “Optimization of inhomogeneous rotating disk with non-gradient methods, ” In Persian, Modares technical and engineering journal, Vol. 38, pp. 107-120, 1388.

[15] Jafari, S., Hojjati, M. H., Fathi, A., “Classical and modern optimization methods in minimum weight design of elastic rotating disk with variable thickness and density,” International journal of pressure vessel and piping, Vol. 92, pp.41-47, 2012.

[16] He, J. H., “Homotopy perturbation technique,” Computational Methods Applied Mechanical Engineering, Vol. 178, pp. 257–62, 1999.

[17] He, J. H., “Homotopy perturbation method: a new nonlinear analytical technique,” Applied Mathematical Computation, Vol. 135, pp. 73–80, 2003.

[18] He, J. H., “Asymptotology by homotopy perturbation method,” Applied Mathematical Computation, Vol. 6, pp. 156-591, 2004.

1. Rotating disk [↑](#footnote-ref-1)
2. Functionally graded material (FGM) [↑](#footnote-ref-2)
3. Karush-Kohn-Tucker (KKT) [↑](#footnote-ref-3)
4. Gamer [↑](#footnote-ref-4)
5. Teresca [↑](#footnote-ref-5)
6. Eraslan [↑](#footnote-ref-6)
7. Von Mises [↑](#footnote-ref-7)
8. You et al [↑](#footnote-ref-8)
9. Naghd Abadi et al [↑](#footnote-ref-9)
10. Bayat [↑](#footnote-ref-10)
11. Haypergeometric Function [↑](#footnote-ref-11)
12. Dai et al [↑](#footnote-ref-12)
13. Jahed [↑](#footnote-ref-13)
14. Farshi [↑](#footnote-ref-14)
15. Inscribed Hypersphere Method [↑](#footnote-ref-15)
16. Bidabadi [↑](#footnote-ref-16)
17. Jafari et al [↑](#footnote-ref-17)
18. Nonlinear Programming (NLP) [↑](#footnote-ref-18)
19. Heissian [↑](#footnote-ref-19)