**تحلیل سازه­های ایزو استاتیک با استفاده از روش ترسیمی کرمونا**

یحیی چوپانی1\*، علیرضا خادمی2

# 1- دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنتی امیرکبیر، تهران، ایران

2- مربی، عضو هیات علمی، دپارتمان مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و حرفه­ای شماره 2، دانشگاه فنی و حرفه‌ای استان کرمانشاه، ایران

# \*تهران، 1416753641، Yahya.Choopani@gmail.com

چکیده

استاتیک ترسیمی (Graphical statics) یک روش پیشرو در طراحی و تحلیل سازه­ها است که با استفاده از روش ترسیمی کرمونا (Cremona) تمامی نیروی‌های داخلی سازه بدون به کار بردن روش­های مفاصل و مقاطع، محاسبه می­گردد. این روش، بر اساس قوانین هندسی بوده و از قضیۀ متوازی‌الاضلاع، نمودار نیروها و چندضلعی‌ها پیروی می­کند. در این مقاله، با استفاده از روش ترسیمی کرمونا تحلیل سازه­های ایزو استاتیک موردبررسی قرارگرفته است. برای انجام ترسیم­ها، از نرم‌افزار اتوکد استفاده شد و نتایج به‌دست‌آمده از روش ترسیمی کرمونا، با نتایج تحلیلی، مقایسه و اعتبارسنجی شده است. نتایج این مقاله نشان می­دهند که برای طراحی مفهومی یک سازه، روش ترسیمی کرمونا در مقایسه با روش­های تحلیلی سریع‌تر، انطباق پذیر و کاراتر می‌باشد. بعلاوه، این روش یک ابزار مفید و قدرتمند برای تجسم مسائل مربوط به انواع سازه­ها می­باشد و به‌وسیلۀ آن تمامی نیروهای داخلی سازه محاسبه‌شده است. همچنین نشان می­دهند که تحلیل کرمونا بدون استفاده از معادله­های تعادل انجام‌شده و زمان حل مسئله به‌طور چشم­گیری کاهش‌یافته است. حل تحلیلی، نتایج به‌دست‌آمده را تأیید می­نماید.

**کلی**د‌واژگ**ان**

روش استاتیک ترسیمی، تحلیل کرمونا، سازه، نمودار فضایی، نمودار برداری

ISO static analysis of trusses by using Cremona graphical method

Yahya Choopani1**\*, Alireza Khademi2**

1- PhD student, Department of Mechanical Engineering, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran

2- Technical trainer, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Technical and Vocational No. 2, Technical and Vocational University (TVU), Kermanshah, Iran

\* Tehran, 1416753641, Yahya.Choopani@gmail.com

Abstract

Graphical statics is a leading method of designing and analyzing structures that calculates using the Cremona graphical method all the internal forces of the structure without employing joint and cross section methods. This method is based on geometrical laws and follows the parallelogram, force diagram and polygon. In this paper, the analysis of iso static structures is investigated using the Cremona graphical method. To draw, AutoCAD software was used and the results were compared with analytical results and validated by the Cremona graphical method. The results of this paper show that for the conceptual design of a structure, the Cremona graphical method is faster, more adaptable and more efficient than the analytical methods. In addition, this method is a useful and powerful tool for visualizing the problems related to the types of structures, by which all internal forces of the structure are calculated. Also show that the Cremona analysis is significantly reduced without using equilibrium equations and problem solving time. The analytical solution confirms the obtained results.

Keywords

Graphical Statics Method, Cremona Analysis, Truss, Space Diagram, Victor Diagram

1. مقدمه

خرپا یکی از انواع اصلی سازه­های مهندسی است که در طراحی پل­ها، ساختمان­ها و غیره استفاده می­شود. هدف از تحلیل یک سازه، به دست آوردن نیروهای داخلی و تغییر شکل­های آن ناشی از بارگذاری معین می­باشد. از طرف دیگر، هرگاه بتوان تمامی نیروهای داخلی یک سازه را فقط با استفاده از معادله­های تعادل و بدون در نظر گرفتن تغییر شکل­های آن به دست آورد آن سازه را یک سازه ایزو استاتیک (معین استاتیکی) می­نامند در غیر این صورت سازه موسوم به سازه هیپر استاتیک (نامعین استاتیکی) می­باشد.

استاتیک ترسیمی یک روش کمی می­باشد که قرن­ها پیش به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای در تحلیل و طراحی انواع سازه­ها استفاده‌شده است. در زمینه روش استاتیک ترسیمی و استفاده از آن در طراحی و تحلیل سازه­های همچون پل­ها و غیره مطالعات بسیاری انجام‌شده است. در ادامه، تحقیقات اخیر که در این زمینه انتشاریافته است، بیان می­شود.

ابتدا استواین برای اولین بار با استفاده قانون متوازی‌الاضلاع، بردار نیروها و چندضلعی­ها نیروهای داخلی یک سازه را تحلیل کرد ]1[. پس‌ازآن، واریگنون قانون نیروی چندضلعی را شرح داد و به دنبال آن چندضلعی بندی و نمودار بردار را معرفی نمود ]2[. در مطالعه­ای دیگر، کولمن اصول بنیادین روش استاتیک ترسیمی بیان کرد و به دنبال آن کتابی با عنوان استاتیک ترسیمی به چاپ رساند ]3[. در تلاش­های دیگر، ماکسول برای اولین بار با استفاده از اسکلت سازه، عکس­العمل سازه­ها را حل کرد. پس‌ازآن، این روش به نام ماکسول نامیده شد ]5-4[.

کرمونا طی مطالعه­ای اصول حاکم بر روش استاتیک ترسیمی را تشریح کرد و به دنبال آن نمودار فضایی و نمودار برداری برای تحلیل سازه­ها را تکمیل کرد. روش کرمونا، در مقایسه با روش­های ماکسول جامع­تر و ساده­تر بود؛ بنابراین روش استاتیک ترسیمی که به‌وسیلۀ کرمونا معرفی شد با استقبال گسترده­ای روبه‌رو شد. امروزه روش استاتیک ترسیمی برای حل سازه­ها اغلب به روش کرمونا شناخته می­شود ]6[. پس‌ازآن محققان بسیاری همچون لوی، باوس، مور و غیره با استفاده از روش استاتیک ترسیمی سازه­ها، پل­ها و غیره را تحلیل کردند ]7[.

اخیراً، بام­گارت با استفاده از روش استاتیک ترسیمی مسائل بیومکانیک حل کرد. همچنین به‌وسیلۀ این روش مرکز ثقل اجسام را به دست آورد ]8[. در مطالعه­ای دیگر، بلوک و همکاران برای درک رفتار طراحی پوسته­های تحت‌فشار از روش استاتیک ترسیمی بهره جستند ]9[. در تحقیقی مشابه، بلوک در موسسۀ تحقیقاتی MIT بر روی روش­های استاتیک ترسیمی مطالعه­ای انجام داد که با استفاده از این روش­ها­، سازه­های پایدار سه­بعدی که در شبکه­های مخابراتی استفاده می­شود، موردبررسی قراردادند ]10[. در تلاشی دیگر، پدرو و همکاران با استفاده از روش استاتیک ترسیمی تیرهای نامعین استاتیکی را محاسبه نمودند ]11[. در تحقیق­های اخیر، باکر و همکاران با استفاده از روش توسعه داده‌شدۀ استاتیک ترسیمی وزن، حجم و نحوه­ی اتصال مفصل­های یک سازه را بهینه کردند. آن­ها و بسیاری از محققین دیگر دریافتند که روش توسعه‌یافتۀ استاتیک ترسیمی می­تواند در زمینه­های مختلف فراتر از تحلیل سازه­ها گسترش یابد ]13-12-7[. همچنین، در انتشارات اخیر سالی­کلیس رویکرد تجزیه‌وتحلیل استاتیک ترسیمی در تحلیل انواع سازه­ها، تشریح کرده است ]14[.

در این مقاله، تحلیل سازه­های ایزو استاتیک با استفاده از روش ترسیمی کرمونا موردبررسی قرارگرفته است. علت انتخاب این روش این است که در تحلیل نیازی به استفاده از معادله­های تعادل، روش­های مفاصل و مقاطع نمی­باشد؛ درنتیجه استفاده از این روش، سازه­ها با سرعت بالایی تحلیل می­شوند و زمان حل آن به‌طور چشم­گیری کاهش می­یابد. در این روش، دقت حل سازه وابسته به‌دقت ترسیم خطوط می‌باشد؛ بنابراین برای انجام ترسیم‌ها، از نرم‌افزار اتوکد استفاده‌شده است. بعلاوه، نتایج به‌دست‌آمده از روش ترسیمی کرمونا با نتایج تحلیلی، مقایسه و اعتبارسنجی شده است.

**2- اساس روش کرمونا**

دقیق­ترین و ساده­ترین راه­حل برای به دست آوردن نیروهای داخلی یک سازه، روش ترسیمی کرمونا است. اگرچه نتایج روش تحلیلی برای تعیین نیروهای داخلی یک سازه (مانند روش مفاصل و روش مقاطع) کاملاً درست می­باشد، اما گاهی اوقات استفاده از روش تحلیلی امکان‌پذیر نمی­باشد؛ بنابراین روش ترسیمی کرمونا برای تحلیل یک سازه مناسب و نتایج قابل قبولی به دست می­آید.

ابتدا با استفاده از روش باوس عضوهای مختلف یک سازه، نام­گذاری می­شود. اساس این روش به این صورت است که هر نیرو با دو حرف مشخص می­شود. همان­طور که در شکل 1 مشاهده می­شود، یک نیرو با حروف AB مشخص‌شده است.



شکل 1: نیروی AB.

برای به دست آوردن نیروهای داخلی یک سازه به‌وسیلۀ روش کرمونا مراحل زیر لازم است:

الف) ساختن نمودار فضایی؛

ب) ساختن نمودار برداری؛

ج) تشکیل جدول نیروها.

**2-1- ساختن نمودار فضایی**

سازه داده‌شده با مقیاس مناسب رسم می­شود. همچنین اندازه، جهت بارها و عکس­العمل­های تکیه­گاهی روی آن نشان داده‌شده است. سپس بر اساس روش نام­گذاری باوس عضوهای سازه نشانه­گذاری شده­اند. همان­طور که در شکل 2-الف دیده می­شود، نیروها و عضوهای سازه با AB، BC و AC مشخص‌شده‌اند. در شکل 2-ب عضوهای AB، BC و AC به ترتیب با حروف کوچک ab، bd و cd نام­گذاری شده­اند، این مرحله به عنوان نمودار فضایی شناخته‌شده است.

**2-2- ساختن نمودار برداری**

نمودار برداری (شکل 2-ب) با توجه به مراحل زیر رسم می­شود:

1- ابتدا از نقطه a خطی موازی با ab رسم می­شود، ab (نیروی P با مقیاس) عمودی و به طرف پایین می­باشد.

2- اکنون از نقطه a خطی موازی با ad رسم می­شود، ad خطی زاویه­دار و به طرف پایین می­باشد. به‌طور مشابه، از نقطه b خطی موازی با bd رسم می­شود، bd خطی زاویه‌دار و به طرف پایین می‌باشد.

3- امتداد خط ad، خط bd را در نقطه d قطع می­کند. نمودار برداری به‌دست‌آمده برای نقطه A می­باشد. به‌طور مشابه، می‌توان با استفاده از این روش نمودار برداری برای نقاط B و C رسم کرد.

**2-3- تشکیل جدول نیروها**

مقدار نیروی یک عضو به‌وسیلۀ طول آن شناخته می­شود، به‌عنوان‌مثال طول ad با توجه به مقیاس رسم شده به دست می­آید. فشاری یا کششی بودن نیروی عضوهای سازه بر اساس روش زیر تعیین می­شود:

1- در نمودار فضایی (شکل 2-ب)، نقاط A، B و C را در نظر بگیرید. نقاط در جهت عقربه­های ساعت حرکت می­کنند. توجه داشته باشید عضوهای سازه با حروف کوچک نام­گذاری شده­اند. برای مثال، همان­طور که در نمودار فضایی (شکل 2-ب) مشاهده می­شود، در نقطه A عضوهای سازه با ad، dc و ca نشان داده‌شده است.

2- همان­طور که در شکل 2-ج نشان داده‌شده است، با حرکت روی این نمودار جهت نیروهای ad، dc و ca در نقطه A به دست می­آید. به‌طور مشابه، با استفاده از این روش می­توان جهت نیروهای تمامی نقاط را مشخص کرد.

3- با توجه به شکل 2-ب هرگاه جهت نیروی یک عضو به مفصل نزدیک شود آن نیرو فشاری و هرگاه از مفصل دور شود آن نیرو کششی می­باشد.

4- همان­گونه که در شکل 2-ج دیده می­شود نیروی عکس­العمل Ay و Cy به ترتیب با ac و bc نشان داده‌شده است.

|  |
| --- |
| (الف) |
| (ب) |
| (ج) |
|  شکل 2: روش ترسیمی کرمونا: (الف) نمودار سازه داده‌شده؛ (ب) نمودار فضایی و (ج) نمودار برداری. |

**3- معرفی مسئله**

هندسه مسئله حاضر مطابق شکل 3 یک سازۀ دوبعدی سقفی است که به سازه هو[[1]](#footnote-1) معروف می­باشد که تحت شرایط بارگذاری ویژه برای تحلیل کرمونا و عددی در نظر گرفته‌شده است.

|  |
| --- |
| شکل 3: سازه هو برای تحلیل کرمونا. |

**4- بحث و نتیجه­گیری**

**4-1- تحلیل کرمونا**

**4-1-1- ساختن نمودار فضایی**

همان­طور که قبلاً اشاره شد، سازه داده‌شده را با مقیاس مناسب ترسیم می­کنیم. بدین منظور به ازای هر 4 فوت مقدار 100 میلی­متر و به ازای هر 1 پوند1 میلی­متر در نظر گرفته‌شده است. همان­طور که در شکل 4-الف مشاهده می­شود، بارهای 300 پوند، 600 پوند، 600 پوند، 600 پوند و 300 پوند و عکس­العمل­های Ay و Hy روی سازه نشان داده‌شده است. سپس با استفاده از روش باوس عضوهای سازه نام­گذاری شده­اند. بر اساس این روش، عضوهای AB، AC، BC، CE، BD، BE، DF، DE، EF، EG، FG، FH و GH به ترتیب bh، hg، hi، ig، cj، ij، dk، jk، km،mg، mn، en و ng نام­گذاری شده­اند (شکل 4-الف).

**4-1-2- ساختن نمودار برداری**

همان­طور که پیش‌تر نیز اشاره شد، برای ساختن نمودار برداری شکل 4-ب مراحل زیر لازم است:

1- ابتدا از نقطۀ a خط ab که نشان‌دهندۀ بار 300 پوندی است با مقیاس لحاظ شده به‌صورت عمودی و با توجه به جهت آن به طرف پایین رسم شده است. به‌طور مشابه، می­توان با استفاده از این روش نقاط b، c، d، e و f رسم کرد.

2- همان­گونه که در شکل 4-ب مشاهده می­شود، از نقطۀ b خطی موازی با خط bh رسم شده است. سپس از نقطۀ e، خطی موازی با خط en رسم شد. خط en، امتداد خط bh را در نقاط h، n، m و i قطع می­کند (شکل 4-ب).

3- مرحله بعدی از نقطۀ c، خطی موازی با خط cj رسم شده است. خط cj، خط en را در نقطۀ j قطع می‌کند (شکل 4-ب).

4- در مرحلۀ آخر از نقطۀ d، خطی موازی با خط dk رسم شده است. خط dk، خط bh را در نقطۀ k قطع می­کند. همان­طور که در شکل 4-ب دیده می­شود نمودار برداری سازه به‌دست‌آمده است و با استفاده از آن می­توان مقدار نیروی عضوهای سازه را استخراج کرد.

|  |
| --- |
| (الف) |
| (ب) |
| شکل 4: روش ترسیمی کرمونا: (الف) نمودار فضایی و (ب) نمودار برداری. |

**4-1-3- تشکیل جدول نیروها**

همان­طور که در شکل 4-ب نشان داده‌شده است، می­توان با استفاده از نمودار برداری طول عضوهای مختلف سازه را اندازه­گیری کرد. سپس به کمک ضریب مقیاس مقدار نیروی عضوها را تعیین کرد. در جدول 1 نحوه­ی استخراج نیروی عضوهای سازه نشان داده‌شده است.

جدول 1: استخراج نیروهای سازه با استفاده از نمودار برداری.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| عضو | نیروی عضو (پوند) | نوع نیرو |
| مطابق سازه داده‌شده | مطابق نام­گذاری روش باوس |
| AB | bh | 1500 | فشاری |
| AC | hg | 1200 | کششی |
| BC | hi | 0 | - |
| CE | ig | 1200 | کششی |
| BD | cj | 1000 | فشاری |
| BE | ij | 500 | فشاری |
| DF | dk | 1000 | فشاری |
| DE | jk | 600 | کششی |
| EF | km | 500 | فشاری |
| EG | mg | 1200 | کششی |
| FG | mn | 0 | - |
| FH | en | 1500 | فشاری |
| GH | ng | 1200 | کششی |

 شایان‌ذکر است که با استفاده از نمودار بردار می­توان نیروهای عکس­العمل Ay و Hy استخراج کرد. همان‌طور که در شکل 4-ب مشاهده می­شود، نیروی عکس­العمل­ Ay=ag=1200 lb و Hy=fg=1200 lb به‌دست‌آمده است.

**4-2- حل تحلیلی و معتبر سازی نتایج**

در این مقاله، نتایج به‌دست‌آمده از روش ترسیمی کرمونا با روش تحلیلی اعتبار­سنجی شده­اند. به‌طورکلی برای حل یک سازه با استفاده از روش تحلیلی دو روش وجود دارد یکی روش مفاصل و دیگری روش مقاطع می­باشد. منظور از حل یک سازه به دست آوردن مقدار و نوع (کششی یا فشاری) نیروهای وارد بر تمام اعضاء سازه می­باشد. زمانی که هدف حل تمامی یا اکثر اعضاء سازه باشد از روش مفاصل استفاده می­شود و زمانی منظور پیدا کردن نیروهای وارده به تعداد محدودی از اعضاء باشد روش مقاطع به‌کاربرده می­شود. با توجه به اینکه محاسبۀ تمامی عضوهای سازه مدنظر می­باشد بنابراین برای حل آن، روش مفاصل در نظر گرفته‌شده است.

**4-2-1- روش مفاصل**

درروش مفاصل، حتی‌الامکان از مفصلی شروع می­شود که حداکثر دو (در سازه­های صفحه­ای) نیروی مجهول داشته باشد. سپس با استفاده از روابط تعادل استاتیکی (معادلات 1) نیروهای مجهول اولین مفصل به دست می­آید، به‌تدریج مفصل­های که بیش از دو مجهول نداشته باشند محاسبه می­شود، بدین ترتیب نیروهای تمامی اعضاء سازه به دست می­آید. اکنون با استفاده از تعادل سازه در امتداد قائم عکس­العمل­هایAy و Hy به دست می­آیند:

|  |  |
| --- | --- |
| (1) |  |
|  |

با نوشتن معادله­های تعادل برای مفصل A نیروهای FAB و FAC  به دست می­آیند (معادلات 2):

|  |  |
| --- | --- |
| (2) |  |
| کششی |  |
| فشاری |

به‌طور مشابه، می­توان با استفاده از این روش معادله­های تعادل برای مفصل­های C، B و D نوشت و به ترتیب نیروهای FBC، FCE، FBD، FBE و FDE محاسبه کرد (معادلات 3).

|  |  |
| --- | --- |
| (3) |  |
| کششی |  |
| فشاری |
| فشاری |
| کششی |

همان‌طور که در شکل 3 مشاهده می­شود، به دلیل تقارن سازه و نحوه­ی بارگذاری آن می­توان نتیجه گرفت که (معادلات 4):

|  |  |
| --- | --- |
| (4) |  |
| فشاری |  |
| کششی |
| - |
| فشاری |
| کششی |

 شایان‌ذکر است که در محاسبه سازه­ها با استفاده از روش تحلیلی نیروی یک عضو را فشاری و یا کششی فرض می­کنند. بنابراین هرگاه کمیت به‌دست‌آمده برای نیروی یک عضو منفی باشد جهت فرض شده برای آن نیرو عکس می­شود.

**5- نتیجه­گیری**

در مقاله حاضر پس از معرفی روش ترسیمی کرمونا، یک حل ترسیمی دقیق برای به دست آوردن تمامی نیروهای داخلی سازه ایزو استاتیک ارائه گردیده است. نتایج حاصل از روش ترسیمی با نتایج تحلیلی، مقایسه و اعتبارسنجی شده است. مشاهده شد که روش ترسیمی کرمونا برای حل سازه احتیاج به هیچ­گونه محاسبۀ تحلیلی ندارد و زمان حل مسئله به‌طور چشم­گیری کاهش‌یافته می­یابد. همچنین نتایج به‌دست‌آمده در این مقاله تبیین‌کننده این امر است که روش ترسیمی کرمونا یک روش منحصربه‌فرد با دقت و کارایی بالا برای تحلیل سازه­ها می­باشد. این روش، باعث بهبود درک دانشجویان و مهندسان برای حل سازه­های پیچیده­تری می­شود. نتایج تحلیل کرمونا صد درصد با نتایج تحلیلی هم­خوانی دارد.

**مراجع**

1. Stevin S. De Weeghdaet. Publisher, Inde druckerye van Christoffel Plantijn by Francoys van Raphelinghen.1586.
2. Varignon P. Traite du mouvement, et de la mesure des eaux coulantes et jaillissantes. Avec un traite preliminaire du mouvemente en general. Tire des manuscrits par l'abbe Pujol. Pissot; 1725.
3. Culmann C. Die graphische statik. Meyer & Zeller; 1875.
4. Maxwell JC. XLV. On reciprocal figures and diagrams of forces. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. 1864 Apr 1;27(182):250-61.
5. Maxwell JC. I.—on reciprocal figures, frames, and diagrams of forces. Earth and Environmental Science Transactions of the Royal Society of Edinburgh. 1870;26(1):1-40.
6. Cremona L. Graphical Statics: Two Treatises on the Graphical Calculus and Reciprocal Figures in Graphical Statics... Claredon Press; 1890.
7. Baker WF, Beghini LL, Mazurek A, Carrion J, Beghini A. Maxwell’s reciprocal diagrams and discrete Michell frames. Structural and multidisciplinary optimization. 2013 Aug 1;48(2):267-77.
8. Baumgart F. Graphical statics a forgotten tool for solving plane mechanical problems. Injury. 2000 May 1;31:24-85.
9. Block P, DeJong M, Ochsendorf J. As hangs the flexible line: Equilibrium of masonry arches. Nexus Network Journal. 2006 Oct 1;8(2):13-24.
10. Block PP. *Thrust network analysis: exploring three-dimensional equilibrium* (Doctoral dissertation, Massachusetts Institute of Technology).2009.
11. Pedro, G.; Lázaro, G.; Maite, C.; Faustino, N. G., Graphical formulary of statically determinate and indeterminate beams. International conference on Innovative Methods in Product Design. June 15th – 17th, Venice, Italy, pp.800-809.2011.
12. Servatius B, Shai O, Whiteley W. Geometric properties of Assur graphs. European Journal of Combinatorics. 2010 May 1;31(4):1105-20.
13. Mazurek A, Baker WF, Tort C. Geometrical aspects of optimum truss like structures. Structural and Multidisciplinary optimization. 2011 Feb 1;43(2):231-42.
14. Saliklis E, Saliklis, Drougas. Structures: A Geometric Approach. Springer International Publishing; 2019.
1. Howe [↑](#footnote-ref-1)