تحلیل دینامیکی تیر تیموشنکو ترک دار- روش تحلیلی

امین قنادی اصل1\*، سعید خداپناه اجیرلو2

 1- استادیار، مهندسی عمران، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل

2- کارشناسی ارشد، مهندسی عمران، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل

\* اردبیل، کدپستی 5619911367، aghannadiasl@uma.ac.ir

چکیده

هنگامي که ترک در ناحیه­ای از سازه اتفاق مي­افتد در آن ناحیه نرمي موضعي ايجاد مي­شود و اين نرمي حاصل از ترک، رفتار دينامیکي سازه را تحت تاثیر قرار می­دهد. تیر­ها با توجه به قرار گرفتن تحت تنش­های برشی و لنگر خمشی بیشتر مستعد بروز ترک­های برشی یا خمشی هستند. در این مقاله رفتار دینامیکی تیر ترک­دار بر پایه تئوری تیری تیموشنکو مطالعه می­شود. از روش تابع گرین برای محاسبه پاسخ دینامیکی تیر ترک دار استفاده شده است و تاثیر وجود ترک بر روی خصوصیات مهم تیر از جمله فرکانس طبیعی بررسی می­شود. ترک در موقعیت­های مختلف مدل­سازی شد و تاثیر آن بر روی فرکانس طبیعی تیر ترک­دار تحلیل و بررسی شد. با توجه به اینکه تئوری اویلر- برنولی نیز در بیشتر تیرها مورد استفاده قرار می­گیرد در این مطالعه نتایج مثال­های عددی با تئوری اویلر- برنولی مقایسه شده و درباره تفاوت آن با تئوری تیموشنکو بحث شده است. مثال­های متعددی برای درک بیشتر از رفتار دینامیکی تیر تیموشنکو ترک­دار تحلیل و بررسی شده است.

**کلی**د‌واژگ**ان**

ترک، تیر ترک دار، تابع گرین، تحلیل دینامیکی، تیر تیموشنکو

Dynamic Analysis of Timoshenko Cracked Beam – Analytical Method

Amin Ghannadiasl1\*, Saeid Khodapanah Ajirlou2

1- University of Mohaghegh Ardabili – Ardabil - Iran.

2- University of Mohaghegh Ardabili – Ardabil - Iran

\* P.O.B. 5619911367, Ardabil, aghannadiasl@uma.ac.ir

Abstract

When the cracks occur in the region of the structure, it creates a local softness zone, and this cracking softness affects the dynamic behavior of the structure. The beams are more susceptible to Shear and flexural cracks due to being subjected to shear and bending stresses. In this paper, the dynamical behavior of the beam is studied based on the theory of Timoshenko's theory. The Green's function method is used to calculate the dynamic response of the cracked beam and the effect of the existence of a crack one beams is investigated on the important characteristics of the beam, including the natural frequency. Crack was modeled in different situations and its effect on the natural frequency of the beam was analyzed. Given that the Euler-Bernoulli theory is also used in most beams, in this study, the results of numerical examples are compared with the Euler-Bernoulli theory and discusses the difference with the theory of Timoshenko. Several examples have been analyzed for a better understanding of Timoshenko's dynamic dynamics.

Keywords

Crack, cracked beam, Green's function, Dynamic Analysis, Timoshenko beam

1. مقدمه

در برخی مواقع که سازه تحت تنشی دچار آسیب می شود این آسیب در سازه به شکل ترک که نوعی از خرابی می باشد خود را نشان می دهد. ترک­ها وسعت خرابی را نشان می­دهند و ارتباط مستقیمی با یکپارچکی سازه دارند چنانچه با گسترش ترک یکپارچکی سازه کاهش می یابد. ترک ها ممکن است ظاهری، نشانه‌ای از یک تنش سازه‌ای مهم، فقدان مقاومت و دوام سازه یا نشان دهنده وسعت خرابی و حجم بیشتری از مشکلات باشند‌. از عوامل ایجاد ترک می توان به قرار گرفتن سازه یا المان در معرض بارهای دینامیکی و یا قرار گرفتن المان تحت بار تکراری اشاره نمود. حتی قرار گرفتن سازه تحت بارهای استاتیکی که از مقدار طراحی شده بیشتر است می تواند منجر به ایجاد ترک در المان های سازه شود. شناسایی رفتار ترک و سرعت گسترش و نحوه گسترش آن، هم از نقطه نظر ایمنی و هم از لحاظ اقتصادی از اهمیت زیادی برخوردار است. شناسایی رفتار تیر ترک خورده باعث می شود تا از وقوع کسیختگی جلوگیری شود. پژوهش های متعددی در زمینه شناسایی رفتار ترک و همچنین بررسی تغییرخصوصیات حاصل از ترک بر روی المان های سازه ای انجام گرفته است. فرناندز و همکارانش[[1]](#footnote-1) از روشی مبتنی بر روش رایلی برای ارزیابی فرکانس بنیادی تیر ترک­دار استفاده کردند. با اضافه کردن توابع چند جمله­ای علاوه بر تغییر شکل طولی، تغییر شکل عرضی را نیز مدنظر قرار دادند و با مقایسه نتایج خود با نتایج حاصل از مدل­سازی المان محدود به درصد خطای ناچیز دست پیدا کردند [1].

دستیابی به فرکانس طبیعی تیر ترک­دار با به کار بردن روش المان محدود توسط ژنگ و کسی سیگلو[[2]](#footnote-2) انجام گرفت. با جایگزین کردن ماتریس انعطاف­پذیر کلی به جای ماتریس انعطاف­پذیر موضعی در محل ترک بود، نتیجه گرفتند که نتایج در مقایسه با ماتریس موضعی از دقت بیشتری برخوردار است [2]. ارتعاشات تیر با ترک های متعددی که بصورت ترک باز تحت بار محوری مدل شده بود توسط بینیسی[[3]](#footnote-3) مطالعه شده است. بینیسی با ارضاء کردن شرایط پیوستگی در محل ترک توانست تابع اشکال مودی را برای تیر با شرایط تکیه گاهی مختلف محاسبه کند و نتایج را با روش المان محدود مقایسه کرد [3].

تحقیقات بر روی تیر ترک­دار مبتنی بر تئوری تیر تیموشنکو توسط لویا و همکارانش[[4]](#footnote-4) صورت گرفت. برای دستیابی به فرکانس طبیعی تیر تیموشنکو ترک­دار، تیر را در ناحیه ترک­دار به دو قسمت تقسیم شد و آنها را با فنر بهم دیگر وصل کردند این روش برای بسط دادن ناپیوستگی در جهت عمودی و چرخشی به کار گرفته شد. معادله دیفرانسیل برای ارتعاش آزاد تیر برای هر قسمت جداگانه حل شد و با شرایط سازگاری مخصوصی در مقطع ترک خورده دو قسمت به هم وصل شدند و با استفاده روش مذکور فرکانس طبیعی را برای تیر به دست آورده و بررسی کردند [4].

کیسا و گورل[[5]](#footnote-5) روش کاربردی عددی را برای تحلیل ارتعاش آزاد تیر ترک­دار با مقطع یکنواخت و غیر یکنواخت دایره­ای ارائه دادند. از روش المان محدود و مود مؤلفه­ای در کنار هم کمک گرفتند و مقطع ترک خورده به وسیله ماتریس به یکدیگر اتصال دادند. با استفاده از روش فوق، فرکانس طبیعی و شکل مودها را پیدا کردند [5]. سخار[[6]](#footnote-6) مطالعات مختلفی که در زمینه شناسایی و بررسی تیر های دارای چندین ترک هستند بررسی و گردآوری کرد سپس با مقایسه آنها، روشی که کارآمدی بیشتری در شناسایی رفتار تیر ترک دار را دارد شناسایی کرد و تاثیراتی که ترک در تیر ایجاد می کند را بررسی کرد [6].

پری ساج و همکارانش[[7]](#footnote-7) تیر ترک دار کنسولی مدل­سازی کرد. و فرکانس طبیعی آن را با استفاده از روش المان محدود به دست آورند. آنها نتایج به دست آمده را با اصل برهم نهی آثار مقایسه کردند [7]. کدمی و موراسی[[8]](#footnote-8) نشان دادند که مسئله استاتیکی و دینامیکی تیر ترک دار را می توان در چارچوب روش های کلاسیک و تئوری توزیع فرمول بندی کرد [8].

سیمسک[[9]](#footnote-9) مطالعات خود را بر روی تحلیل ارتعاش آزاد میکرو تیر که بر روی بستر سه لایه الاستیک غیر خطی قرار دارد با استفاده از تئوری تنش انجام داده است. با کمک گرفتن از اصل همیلتون توانستن معادله حرکت و شرایط مرزی مسئله را استخراج کنند و با بهره گرفتن از روش گالرکین معادله دیفرانسیل جرئی حاکم را به معادله دفرانسیل معمولی غیر خطی تبدیل کردند [9]. رفتار دینامیکی تیرهای پل تحت اثر بار زلزله و همچنین بار وسایل نقلیه توسط نگوین[[10]](#footnote-10) مطالعه شد تیرها را با استفاده از المان محدود به صورت سه بعدی مدل سازی شد و با مطابقت دادن ماتریس سختی از طریق مکانیک شکست، اثرات ترم را بر روی رفتار دینامیکی تیر مورد برررسی قرار داد [10].

محاسبه سختی تیر بتنی مسلح ترک خورده تحت بارگذاری استاتیکی برای ارزیابی و تشخیص سختی دینامیکی ترک توسط اکسیو و کستل[[11]](#footnote-11) انجام گرفته است. در تحقیقات خود اثر ترک خمشی در بتن و همچنین خرابی در اتصال بین فولاد و بتن را در نظر گرفتند و تحلیل استاتیکی و دینامیکی تیر را انجام دادند و به این نتیجه رسیدن که، خرابی موجود در اتصال بین فولاد و بتن تاثیر قابل ملاحظه­ای در فرکانس طبیعی و سختی دینامیکی تیر ندارد[11].

تحقیقات برای تحلیل تیر ترک خورده با استفاده از ارتعاش عرضی بر پایه تئوری تنش تئوری تیر اولر برنولی توسط سورکی و حسینی [[12]](#footnote-12) انجام گرفته است. در معادلات حاکم بر تیر و شرایط مرزی از اصل همیلتون استفاده کرده اند. برای مدل سازی، تیر را از قسمتی که ترک در آن وجود داشت به دو قسمت تقسیم کردند توسط فنر به هم دیگر وصل کردند و نقش پارامترهای مهم در تیر را ارزیابی کردند [12].

بررسی ارتعاش نیرو تیر ترک­دار اولر برنولی توسظ ژائو و همکارانش[[13]](#footnote-13) صورت گرفت. برای این منظور از تابع گرین کمک گرفتند و تیر ترک دار را مدل سازی کردند همچنین برای مدلسازی مقطع ترک خورده از فنر پیچشی استفاده کردند [13]. پانیگراهی و پویت[[14]](#footnote-14) از تئوری تیموشنکو و روش ریتز کمک گرفتند و معادله دیفرانسیل حاکم بر تیر ترک­دار را به دست آوردند. و تاثیرات سرعت چرخشی، عمق ترک، موقعیت ترک و خصوصیات مصالح به کار رفته در تیر را تجزیه و تحلیل کردند [14].

مطالعاتی که بیشتر محققین انجام دادند اثر ترک را در تئوری تیر تیموشنکو در نظر نگرفتند. در این مقاله رفتار دینامیکی تیر تیموشنکو ترک­دار در تیرهای یک دهانه و چند دهانه مطالعه شده است. از روش تابع گرین در مطالعه استفاده شده است و تاثیرات ترک بر روی فرکانس طبیعی و تغییر مکان تیر مورد ارزیابی قرار گرفته است.

**2- معادلات حاکم بر تیر تیموشنکو**

معادله دیفرانسیل حاکم بر تیر تیموشنکو به صورت رابطه (1) بیان می­شود[15] :

|  |  |
| --- | --- |
| (1) |  |

|  |  |
| --- | --- |
| (2) |   |

با جاگذاری معادله (2) در رابطه (1) به صورت زیر داریم:

|  |  |
| --- | --- |
| (3) |    |

با فرض بار و تغییر مکان هارمونیک داریم:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| (4) |  |  |

با جاگذاری رابطه (4) در معادله (3) معادله نهایی به صورت زیر حاصل می­شود:

|  |  |
| --- | --- |
| (5) |     |

فرم ساده شده رابطه (5) به صورت زیر به دست می­آید:

|  |  |
| --- | --- |
| (6) |   |

با به کار گیری اصل برهم نهی روش حل رابطه (6) به صورت زیر بیان می­شود:

|  |  |
| --- | --- |
| (7) |   |

که در آن تابع گرین می­باشد. با استفاده از تابع گرین پاسخ دینامیکی تیر تحت بار متمرکز که در نقطه اعمال می­شود به دست خواهد آمد و با کمک گرفتن از رابطه (7) می­توان پاسخ تیر را برای حالت بار گسترده نیز در دسترس خواهد بود. بنابراین با استفاده تابع گرین معادله زیر قابل حل می­باشد:

|  |  |
| --- | --- |
| (8) |  |

برای رسیدن به پاسخی مبتنی بر تابع گرین که شرایط مرزی را نیز ارضاء کند از تبدیل لاپلاسین استفاده می­کنیم در نهایت رابطه نهایی بر پایه روش گرین مطابق رابطه زیر ارائه می­شود:

|  |  |
| --- | --- |
| (9) |    |

مقادیر ، ، و وابسته به شرایط مرزی تیرها می­باشد و برای هر با شرایط مرزی مخصوص خود مقدار مناسب با آن شرایط انتخاب می­شود همچنین در رابطه بالا  *از روابط زیر تعیین می­شود:*

|  |  |
| --- | --- |
| *(10)* |  |
|  |
|  |
|  |
|  |

*همچنین در روابط (10) به صورت زیر محاسبه می­شود:*

|  |  |
| --- | --- |
| *(11)* |  |
|  |
|  |
|  |

**3- مدل سازی مقطع ترک خورده**

زمانی که ترک در تیری اتفاق می­افتد باعث بروز تغییرات در شیب نمودار تغییر مکان می­شود. تیر در قسمت ترک خورده از هم جدا می­شود و توسط فنر پیچشی با سختی به هم دیگر وصل می­شوند. ناپیوستگی موجود در شیب نمودار تغییر مکان متناسب با لنگر خمشی مقطع ترک خورده است:

|  |  |
| --- | --- |
| (12) |  |

که در آن از رابطه زیر به دست می­آید:

|  |  |
| --- | --- |
| (13) |  |

مقدار که ثابت بی بعد است و از طریق مکانیک شکست مقدار آن محاسبه می شود. محققین مختلفی برای مقطع مستطیلی مقدار را ارائه کردند. فرناندز و همکارانش [1] رابطه (14) برای مقطع مستطیلی ارائه دادند در این مقاله از رابطه (4) در به جهت کارایی بهتر استفاده کردیم. از رابطه (15) که توسط چوندورز و دیمارکوناس[[15]](#footnote-15) [16] ارائه شده است در محدوده بهره گرفتیم.

|  |  |
| --- | --- |
| (14) |    |
| (15) |      |

**4- تابع گرین برای تیر تیموشنکو ترک­دار**

تیر تیموشنکو به طول که بار هارمونیک متمرکز در نقطه اعمال شده را در نظر بگیرید که توسط یک ترک ضعیف شده­ است و در شکل (1) نشان داده شده است. چون وجود ترک موجب ناپیوستگی در شیب نمودار تغییر مکان می­شود بنابراین تیر ترک­دار به دو قسمت تقسیم شده و برای هرقسمت تابع گرین بیان شده در رابطه (9) را در نظر می­گیریم با توجه به اینکه تیر نشان داده شده در شکل (1) دارای شرایط مرزی ساده می­باشد بنایراین مقدار تغییر مکان و لنگر خمشی در محل تکیه گاه­ها در نظر گرفته نخواهد شد به عبارتی مقادیر و برابر صفر در نظر گرفته خواهد شد در نهایت تابع گرین برای تیر یک ترک با شرایط مرزی ساده به صورت رابطه (15) بیان می­شود:

|  |
| --- |
|  |
| **Fig. 1** Simply support one cracked beam**شکل 1** تیر دوسر ساده با یک ترک |
|  |
| **Fig. 2** Simply support multi cracked beamشکل 2 تیر دوسر ساده با ترک­های متعدد  |

|  |  |
| --- | --- |
| (16) | ) |
|  ) |

همان طور که عنوان شد ترک باعث ایجاد ناپیوستگی در طول می­شود بنابراین برای ایجاد پیوستگی در طول تیر از روابط زیر استفاده می­کنیم:

|  |  |
| --- | --- |
| (17) |   |
|   |
|   |
|   |

در رابطه (17) مقادیر ، و از روبط زیر محاسبه می­شود:

|  |  |
| --- | --- |
| (18) |  |
|  |
|  |

با جاگذاری رابطه (16) در روابط (17) به ماتریس ضرایب زیر دست پیدا می­کنیم که با محاسبه دترمینان آن فرکانس­های طبیعی تیر دوسر ساده با یک ترک به دست خواهد آمد:

|  |  |
| --- | --- |
| (19) |  |

مقادیر مجهول در رابطه (19) از روابط زیر محاسبه می­شود:

|  |  |
| --- | --- |
| (20) |   |
|   |
|   |
|  |
|  |  |

به منظور مدلسازی تیر با ترک­های متعدد تیری به طول تحت بار متمرکز دینامیکی با ترک­های متعدد در شکل (2) نمایش داده شده است. وجود ترک، تیر را به قسمت تقسیم می­کند. برای هرقسمت رابطه (9) به صورت جداگانه استفاده می­شود و با به کار بردن روابط پیوستگی مخصوص هر قسمت پیوستگی در طول تیر ایجاد می­شود که در نهایت با حل آن تغییر مکان تیر ترک­دار به دست می­آید.

|  |  |
| --- | --- |
| *(21)* | ) |
|  ) |
| ) |

برای قسمت­های شرایط پیوستگی به صورت زیر بیان می­شود:

|  |  |
| --- | --- |
| (22) |   |
|   |
|  |
|   |

همچنین برای قسمت نهایی تیر ترک­دار تیموشنکو معادلات پیوستگی را به صورت رابطه (23) داریم:

|  |  |
| --- | --- |
|  (23) |   |
|   |
|    |
|   |

با جانشین کردن رابطه (21) در روابط پیوستگی (22) و (23) به 8 معادله 8 مجهولی دست می­یابیم که ماتریس ضرایب آن به صورت زیر بیان می­شود:

|  |  |
| --- | --- |
| **(**24) |  |
|  |
|  |
|  |
|  |

**5- مثال­های عددی**

**5-1- تیر تیموشنکو با ترک در موقعیت­های مختلف**

تیر کنسولی با مشخصات و در شکل (4) نشان داده شده است. با فرض میرایی صفر فرکانس طبیعی تیر با یک ترک که ترک در موقعیت های مختلف تیر قرار گرفته است در جدول (1) نمایش داده شده است به منظور صحت سنجی روش ارائه شده در این مقاله مقادیر به دست آمده با نتایج مطالعات کروچاک و همکارانش[[16]](#footnote-16) ]17[ مقایسه شده و درصد خطاء این مقایسه نیز در جدول ذکر شده است. از جدول (1) می توان دریافت که درصد خطای روش حاضر با روش استفاده شده توسط کروچاک همکارانش بسیار ناچیز است همچنین با افزایش نسبت ترک فرکانس طبیعی تیر ترک­دار تیموشنکو کاهش می­یابد که مقدار این کاهش با افزایش عمق ترک محسوس­تر می­شود. تغییر مکان تیر با ترک در موقعیت­های مختلف در شکل (5) نمایش داده شده است زمانی که ترک در نزدیکی تکیه گاه قرار دارد به علت جذب بیشتر نیرو تغییر مکان­ها محسوس­تر از زمانی است که ترک از تکیه گاه دور می­شود.

|  |
| --- |
|  |
| **Fig. 4** cracked beam with variation**شکل 4** تیر ترک دار با موقعیت ترک متغیر  |

**جدول 1** فرکانس­های طبیعی تیر کنسولی ترک­دار

 **Table 1** natural frequencies of cantilever cracked beam

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| درصد خطا | مطالعه [17] | مطاله حاضر | موقعیت ترک | نسبت ترک |
| 0.75 | 0.5 | 0.25 | 0.75 | 0.5 | 0.25 | 0.75 | 0.5 | 0.25 |
| 0.3520 | 0.3328 | 0.2525 | 26.138 | 26.138 | 26.138 | 26.23 | 26.225 | 26.204 | فرکانس اول |  |
| 0.0317 | 0.0518 | 0.0664 | 164.24 | 164.24 | 164.24 | 164.292 | 164.155 | 164.349 | فرکانس دوم |
| 0.0479 | 0.1144 | 0.0065 | 459.62 | 459.62 | 459.62 | 459.4 | 460.146 | 459.59 | فرکانس سوم |
| 0.3328 | 0.1569 | 0.1496 | 26.138 | 26.138 | 26.075 | 26.225 | 26.179 | 26.036 | فرکانس اول |  |
| 0.0366 | 0.2608 | 0.0798 | 163.93 | 163.36 | 164.18 | 163.87 | 162.934 | 164.311 | فرکانس دوم |
| 0.2960 | 0.7249 | 0.1535 | 457.16 | 456.62 | 458.04 | 455.807 | 459.93 | 457.337 | فرکانس سوم |
| 0.3328 | 0.5756 | 1.2343 | 26.138 | 25.887 | 25.196 | 26.225 | 26.036 | 25.507 | فرکانس اول |  |
| 0.4893 | 1.2308 | 0.1262 | 161.67 | 157.21 | 163.99 | 162.461 | 159.145 | 164.197 | فرکانس دوم |
| 1.2230 | 0.0920 | 0.8010 | 439.26 | 459.62 | 446.8 | 444.632 | 460.043 | 450.379 | فرکانس سوم |

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |
| **Fig. 5** Displacement of cracked beam in difference location of crack **شکل 5** تغییر مکان تیر ترک دار در موقعیت­های مختلف ترک |

**5-2- مقایسه تئوری تیر تیموشنکو با تئوری تیر اویلر- برنولی**

تیر دوسر ساده با مشخصات ارائه شده در جدول (3) را که ترکی با در فاصله از تکیه چپ دارد را در نظر بگیرید. تغییر مکان تیر بدون ترک و ترک دار در هر دو تئوری مذکور تحت بار دینامیکی با فرکانس و در شکل (9) نشان داده شده است. با دقت در شکل (10) متوجه می­شویم در فرکانس پایین تغییر مکان تیر ترک­دار در هر دو تتوری بسیار نزدیک به هم می­باشند. به عبارتی دیگر ترک باعث تغییر در تئوری حاکم می­شود. در فرکانس بالا تغییر مکان در تئوری تیموشنکو بیشتر از تئوری اویلر- برنولی می­باشد.

**جدول 3** مشخصات تیر دو سر ساده

**Table 3** Constants used in the simply support beam

|  |  |
| --- | --- |
| مقدار | پارامتر |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |
|  |
| **Fig. 9** Comparison of Timoshenko's theory with Euler-Bernoulli**شکل 9** مقایسه تئوری تیموشنکو با اویلر - برنولی |

6- نتیجه گیری

در این مقاله رفتار دینامیکی تیر تیموشنکو ترک­دار مورد ارزیابی قرار گرفت. از روش تابع گرین برای محاسبه پاسخ دینامیکی تیر ترک­دار استفاده شد و تاثیر وجود ترک بر روی خصوصیات مهم تیر از جمله فرکانس طبیعی بررسی شد. معادلات مربوط به پاسخ دینامیکی تیر ترک­دار میرا تحت بار دینامیکی نیز استخراج شد. مشاهده کردیم با افزایش عمق ترک تاثیرات آن بر روی فرکانس طبیعی محسوس­تر می­شود. همچنین فرکانس طبیعی تیر ترک­دار درتئوری اویلر – برنولی و تیموشنکو محاسبه و مقایسه گردید. همچنین تغییر مکان تیر تیموشنکو در بار با فرکانس­ بالا و پایین با تئوری اویلر برنولی مقایسه شد و مشاهده شد در بار با فرکانس بالا تغییر مکان تیر تیموشنکو ترک­دار بیشتر از تغییر مکان تیر اویلر – برنولی می­باشد در بار با فرکانس پایین این اختلاف کمتر است. موقعیت ترک در طول تیر نیز مورد ارزیابی قرار گرفت و ملاحظه شد با نزدیک شدن ترک به تکیه گاه تغییر مکان محسوس­تر از موقعیت­های دیگر است.

7- فهرست علایم

|  |  |
| --- | --- |
|  | مدول الاستیسیته |
|  | مدول برشی |
|  | ضریب میرایی انتقالی |
|  | ضریب میرایی پیچشی |
|  | لنگر خمشی گذرا از مقطع ترک خورده |
|  | سطح مقطع تیر |
|  | ممان اینرسی |
|  | طول تیر |
|  | ارتفاع تیر |
|  | ارتفاع ترک |
|  | نسبت ارتفاع ترک به ارتفاع تیر |
|  | دلتای دیراک |
|  | تابع هویساید |
|  | محل اعمال بار |
| علایم یونانی |
|  | وزن واحد طول |
|  | ممان اینرسی پیچشی |
|  | چگالی  |
|  | ضریب پواسون |
|  | ضریب برشی |
|  | زاویه پیچشی |
|  | شیب نمودار تغییر مکان |

8- مراجع

[1] J. Fernandez-Saez, L. Rubio, C. Navarro, Approximate calculation of the fundamental frequency for bending vibrations of cracked beams, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 225, No. 2, pp. 345-352, 1999.

 [2] D. Y. Zheng, N. J. Kessissoglou, Free vibration analysis of a cracked beam by finite element method, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 273, No. 3, pp. 457-475, 2004.

 [3] B. Binici, Vibration of beams with multiple open cracks subjected to axial force, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 287, No. 1-2, pp. 277-295, 2005.

 [4] J. A. Loya, L. Rubio, J. Fernandez-Saez, Natural frequencies for bending vibrations of Timoshenko cracked beams, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 290, No. 3-5, pp. 640-653, 2006.

 [5] M. Kisa, M. A. Gurel, Free vibration analysis of uniform and stepped cracked beams with circular cross sections, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 45, No. 2-8, pp. 364-380, 2007.

 [6] A. S. Sekhar, Multiple cracks effects and identification, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 22, No. 4, pp. 845-878, 2008.

 [7] Z.I. Praisach, I. Negru, G.R. Gillich, Application of superposition principle to detect damages in beams by using natural frequencies, *Romanian Journal of Acoustics and Vibration*, Vol. 9, No. 1, pp. 23-28, 2012.

 [8] S. Caddemi, A. Morassi, Multi-cracked Euler–Bernoulli beams: mathematical modeling and exact solutions, *International journal of solids and structures*, Vol. 50, No. 61, pp. 944-956, 2013.

 [9] M. Şimşek, Nonlinear static and free vibration analysis of microbeams based on the nonlinear elastic foundation using modified couple stress theory and He’s variational method, *Composite Structures*, Vol. 112, pp. 264-272, 2014.

 [10] K.V. Nguyen, Dynamic analysis of a cracked beam-like bridge subjected to earthquake and moving vehicle, *Advances in Structural Engineering*, Vol. 18, No. 1, pp. 75-95, 2015.

 [11] T. Xu, A. Castel, Modeling the dynamic stiffness of cracked reinforced concrete beams under low-amplitude vibration loads, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 368, pp. 135-147, 2016.

 [12] R. Sourki, S. A. H. Hoseini, Free vibration analysis of size-dependent cracked microbeam based on the modified couple stress theory, *Applied Physics*, Vol. 122, No. 4, pp. 1-11, 2016.

 [13] X. Zhao, Y. R. Zhao, X. Z. Gao, X. Y. Li, Y. H. Li, Green's functions for the forced vibrations of cracked euler–bernoulli beams. mechanical Systems and Signal Processing, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 68, pp. 155-175, 2016.

 [14] B. Panigrahi, G. Pohit, Effect of cracks on nonlinear flexural vibration of rotating Timoshenko functionally graded material beam having large amplitude motion, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, Vol. 232, No. 6, pp. 930-940, 2018.

[15] X. Y. Li, X. Zhao, Y. H. Li, Green's functions of the forced vibration of Timoshenko beams with damping effect, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 333, No. 6, pp. 1781-1795, 2014.

[16] T. G. Chondros, A. D. Dimarogonas, J. Yao, A continuous cracked beam vibration theory, *Journal of sound and vibration*, Vol. 215, No. 1, pp. 17-34, 1998.

 [17] M. Krawczuk, M. Palacz, W. Ostachowicz, The dynamic analysis of a cracked Timoshenko beam by the spectral element method, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 264, No. 5, pp. 1139-1153, 2003.

1. Fernandez et al [↑](#footnote-ref-1)
2. Zheng and Kessissoglou [↑](#footnote-ref-2)
3. Binici [↑](#footnote-ref-3)
4. Loya et al [↑](#footnote-ref-4)
5. Kisa and Gurel [↑](#footnote-ref-5)
6. Sekhar [↑](#footnote-ref-6)
7. Praisach et al [↑](#footnote-ref-7)
8. Caddemi and Morassi [↑](#footnote-ref-8)
9. Simsek [↑](#footnote-ref-9)
10. Nguyen [↑](#footnote-ref-10)
11. Xu and Castel [↑](#footnote-ref-11)
12. Sourki & Hoseini [↑](#footnote-ref-12)
13. Zhao et al [↑](#footnote-ref-13)
14. Panigrahi and Pohit [↑](#footnote-ref-14)
15. Chondros and Dimarogonas [↑](#footnote-ref-15)
16. Krawczuk et al [↑](#footnote-ref-16)