مطالعه‎ی حرکت غیرخطی آونگ فضایی و تحلیل عددی با نرم‎افزار XPP

محمد حسین زاده1، مجید شاه‎قلی2\*

 1- دانشجوی کارشناسی مهندسی مکانیک دانشگاه شهید رجایی تهران

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی، تهران

\* تهران، majid.shahgholi@sru.ac.ir

چکیده

آونگ فضایی مدل ساده‎ای برای بسیاری از پدیده های طبیعی و مکانیکی است. رفتار حرکتی آونگ فضایی غیرخطی و پیچیده است. در این مطالعه، سیستم آونگ فضایی توصیف شده‎است و معادلات حرکت آن با استفاده از معادله لاگرانژ مورد به‎دست آمده است. هدف این مطالعه بررسی رفتار غیرخطی آونگ فضایی است. معادلات به‎دست آمده، در فضای حالت بازنویسی و برای استفاده در نرم‎افزار XPP آماده شده‎اند. در ادامه، سیستم در حالت ارتعاش آزاد و ارتعاش اجباری تحت نیروی افقی مورد بررسی قرار گرفته است. با توجه به پارامترهای مسئله که شامل فرکانس طبیعی سیستم، فرکانس نیروی خارجی و ضریب نیروی خارجی می‎شود، مطالعه‎ی انجام شده به بخش‎های مختلفی تقسیم شده است و در هرکدام از این بخش‎ها به‎ازای مقادیر مختلف پارامترها، نمودارهای پاسخ زمانی، صفحه فاز، و پوانکاره رسم و بررسی شده‎اند و با استفاده از آن‎ها تاثیرات تغییر پارامترها بر دامنه‎ی حرکت و رفتار کلی سیستم مشاهده و تحلیل شده است. در نهایت مشاهده شد که، حرکت آونگ فضایی در حالت آزاد یکپارچه است. در حالت ارتعاش اجباری نیز، مشاهده‎ می‎شود که تغییرات فرکانس طبیعی یا فرکانس نیروی خارجی در بعضی حالت‎ها سبب افزایش فازهای حرکتی می‎شود در حالیکه در بعضی موارد تنها بر دامنه‎ی سرعت و مدت زمان تغییر فاز اثر می‎گذارد. همچنین همواره سیستم به ازای مقادیر کوچک ضریب نیروی خارجی، رفتار منظم‎تری از خود نشان می‎دهد.

**کلی**دواژگ**ان**

آونگ فضایی، پاندول فضایی، حرکت غیرخطی، نرم افزار XPP ، تحلیل عددی

A study on nonlinear motion of spherical pendulum and numerical analysis using XPP software

Mohammad Hosseinzadeh1, Majid Shahgholi2\*

1- Department of Mechanics Engineering, Shahid Rajaee Teacher Training University, Tehran, Iran.

2- Department of Mechanical Engineering, Shahid Rajaee Teacher Training University, Tehran, Iran

\* Tehran, Iran, majid.shahgholi@sru.ac.ir

Abstract

The spherical pendulum is a simple model for many natural and mechanical phenomena. The behavior of spherical pendulum is nonlinear and complex. In this study, the spherical pendulum system is described and its equations of motion are obtained using the Lagrange equation. The obtained equations are rewritten for use in XPP software. Then free vibration and forced vibration under horizontal force have been studied. Due to the parameters of the problem, which include the natural frequency of the system, the external force frequency, and the external force coefficient, the study is divided into different sections and in each of these sections for different values of parameters, time history diagrams, phase diagrams, and Poincaré are plotted and using these diagrams, the effects of changing parameters on the amplitude of motion and overall behavior of the system have been analyzed. Finally, it was observed that in free vibration, the motion of the spherical pendulum is integrable. In forced vibration mode, it is observed that changes in natural frequency or external force frequency in some cases increase the phases in the phase plane, while in some cases only affect the amplitude and duration of phase shift. Also, the system always behaves in a more orderly manner for small values of the external force coefficient.

Keywords

Spherical pendulum, nonlinear motion, XPP, XPP/AUTO, Numerical Analysis

1. مقدمه

در زندگی امروزه‎ی ما و مخصوصا در علم مهندسی، ارتعاشات و نحوه‎ی حرکت از اهمیت بالایی برخوردار است. معمولا برای بررسی یک پدیده‎ی طبیعی، ابتدا سعی می‎شود مدل ساده‎ای برای آن پدیده در نظر گرفته شود که رفتار آن را با تقریب مناسبی شبیه سازی کند. سپس به‎جای مطالعه‎ی پدیده‎ی اصلی، مدل آن مورد بررسی و مطالعه قرار می‎گیرد، چراکه مطالعه‎ی رفتار آن ساده‎تر است و در عین حال جواب مناسبی برای نیاز ما خواهد بود. آونگ فضایی، مدل بسیاری از پدیده‎های طبیعی و مهندسی، مخصوصا مدل هایی با تقارن کروی می‎باشد. در شهر بازی‎ها یا انواع ماشین‎آلات ساخت و ساز، آونگ فضایی قابل مشاهده است.

حرکت و رفتار آونگ فضایی در سه بعد صورت می‎گیرد که پیچیده و غیرخطی است. یکی از حالت‎های حرکت آونگ فضایی، حرکت صفحه‎ای است. ارتعاش اجباری آونگ در صفحه، قبلا مطالعه شده‎است و رفتارهای متفاوتی در حرکت آن مشاهده شده است[[1](#_ENREF_1)]. آونگ فضایی، یک سیستم یکپارچه[[1]](#footnote-1) است، که توضیحات بیشتر در این زمینه را می‎توان در مطالعه‎ی کوشمن و بیتس[[2]](#footnote-2)[[2](#_ENREF_2)] یافت. با اینحال آونگ فضایی تحت نیرو یکپارچه نیست [[3](#_ENREF_3)]. آونگ فضایی تحت نیروی افقی، ابتدا توسط میلز[[3]](#footnote-3) [[4](#_ENREF_4)] مطالعه شد و در آن به بررسی پایداری حالت صفحه‎ای و همچنین حرکت آن تحت یک اختلال غیرخطی با دامنه‎ی کوچک پرداخته شد. مطالعه‎ی دیگری[[5](#_ENREF_5)] نشان از انشعاب‎[[4]](#footnote-4)های مختلف در حرکت آونگ فضایی دارد، از جمله حرکت صفحه‎ای و غیرصفحه‎ای و همچنین حرکت آشوبناک. همچنین شواهد تجربی[[6](#_ENREF_6)] رفتار پیچیده و آشوبناک آونگ فضایی را تایید می‎کند. در مطالعه‎ای پیشرفته‎تر توسط برایانت[[5]](#footnote-5)[[7](#_ENREF_7)] حرکت غیرصفحه‎ای کواسی و آشوبناک بررسی شده است. استون[[6]](#footnote-6)[[8](#_ENREF_8)] مطالعه‎ی اخیر را با روش عددی و انشعاب ادامه داد. در مطالعه‎ی دیگری توسط میلز، از آونگ فضایی به‎عنوان مدل حرکت نامنظم یک سیال داخل یک ظرف استوانه‎ای استفاده شد[[9](#_ENREF_9), [10](#_ENREF_10)].

 با توجه به مطالعات فوق و نظر به پیچیدگی سیستم، در این مطالعه سعی شده است رفتار غیرخطی سیستم با روش عددی، مورد بررسی قرار گیرد.

1. به‎دست آوردن معادله حرکت با استفاده از معادله لاگرانژ

در شکل 1 آونگ فضایی در سیستم مختصات قابل مشاهده‎است. با توجه به شکل معادلات حرکت را به‎دست می‎آوریم[[11](#_ENREF_11)]. ابتدا معادلات انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم را می‎نویسیم.

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^{2}+\dot{y}^{2}+\dot{z}^{2}\right)$$

$$V=mgz$$

حال با استفاده از روابط فوق و معادله‎ی لاگرانژ، و باتوجه به نیروی وارد شده در راستای x، معادلات حرکت را به‎دست می‎آوریم. با توجه به اینکه طول آونگ ثابت است، معادلات در دو جهت x و y به‎دست می‎آیند.

$$\ddot{x}+ω\_{0}^{2}x+x\left(\dot{x}^{2}+\dot{y}^{2}+x\ddot{x}+y\ddot{y}\right)+\frac{1}{2}ω\_{0}^{2}x\left(x^{2}+y^{2}\right)=f\left(t\right)$$

$$\ddot{y}+w\_{0}^{2}y+y\left(\dot{x}^{2}+\dot{y}^{2}+x\ddot{x}+y\ddot{y}\right)+\frac{1}{2}ω\_{0}^{2}y\left(x^{2}+y^{2}\right)=0$$

|  |
| --- |
| ­ |
| **Fig. 1** Spherical pendulum  |
| **شكل 1** آونگ فضایی |

1-2- به‎دست آوردن معادله حالت و آماده سازی معادلات برای استفاده در نرم‎افزار XPP

با استفاده از معادلات حرکت، معادلات فضای حالت را به‎دست می‎آوریم.

$$\ddot{x}=\frac{f\left(t\right)-(x-\frac{y^{2}x}{1+y^{2}})(ω\_{0}^{2}+\dot{x}^{2}+\dot{y}^{2}+\frac{1}{2}ω\_{0}^{2}\left(x^{2}+y^{2}\right))}{1+x^{2}+\frac{x^{2}y^{2}}{1+y^{2}}}$$

$$\ddot{y}=\frac{-\frac{xyf\left(t\right)}{1+x^{2}}+\left(\frac{x^{2}y}{1+x^{2}}-y\right)\left(ω\_{0}^{2}+\dot{x}^{2}+\dot{y}^{2}+\frac{1}{2}ω\_{0}^{2}\left(x^{2}+y^{2}\right)\right)}{1+xy^{2}+\frac{x^{2}y^{2}}{1+x^{2}}}$$

فضای حالت را بصورت زیر تعریف می‎کنیم.

$$\dot{x} = xp$$

$$\ddot{x} = xp’$$

$$\dot{y} = yp$$

$$\ddot{y} = yp’$$

نیروی f(t) نیز با رابطه‎ی زیر داده می‎شود (در حالت ارتعاش آزاد، نیروی f(t) صفر است).

$f\left(t\right)=k\cos(ωt)$

در نرم‎افزار XPP برای استفاده از توابع سینوس یا کسینوس که آرگومان آنها شامل متغییر زمان باشد، لازم است از روابط زیر استفاده شود:

$$c'=c\*(1-c\^2-s\^2)-omega\*s$$

$$s'=s\*(1-c\^2-s\^2)+omega\*c$$

که omega همان ω می‎باشد. برای فراخوانی سینوس از s و برای فراخوانی کسینوس از c استفاده می‎کنیم.

در نهایت معادلات را بصورت زیر تغییر می‎دهیم تا از آنها در نرم‎افزار استفاده کنیم.

$$xp'= ( k\*c-(x -(y\^2\*x/(1+y\^2)))\*w0\^2 +xp\^2 +yp\^2 +(w0\^2)\*(x\^2 +y\^2)/2 )/(1+x\^2 -(x\^2\*y\^2 / (1+y\^2)))$$

$$yp'= (-x\*y\*k\*c/(1+x\^2) +(x\^2\*y/(1+x\^2)-y)\*w0\^2 +xp\^2 +yp\^2 +(w0\^2)\*(x\^2 +y\^2)/2 )/( 1+y\^2 - x\^2\*y\^2/(1+x\^2) )$$

1. تحلیل عددی

باتوجه به معادلات حرکت، پارامترهای مسئله عبارتند از: فرکانس طبیعی، فرکانس نیروی خارجی، و ضریب نیروی خارجی. در تحلیل عددی، با توجه به این پارامترها، چند حالت در نظر گرفته شده است. در هر حالت با تغییر مقدار پارامترها در یک بازه‎ی در نظر گرفته‎شده، نمودارهای پاسخ زمانی، صفحه فاز و بعضا نمودار پوانکاره رسم و تحلیل شده‎است.

در هر حالت منظور از تابع سینوسی کوچک یا بزرگ، به ترتیب تابع سینوسی با دوره تناوب کوچکتر یا بزرگتر، نسبت به دیگری می‎باشد.

3-1- ارتعاش آزاد سیستم

در حالت ارتعاش آزاد، نمودارهای پاسخ زمانی x و y یک تابع سینوسی کامل را نشان می‎دهند. در این قسمت دوحالت قابل بررسی است: تغییرات رفتار سیستم براساس تغییرات فرکانس طبیعی و براساس تغییرات مقادیر اولیه‎ی x و y.

با افزایش فرکانس طبیعی، دامنه‎ی حرکتی x و y ثابت می‎ماند و دوره تناوب در هردو راستای x و y کاهش، اما دامنه‎ی تغییرات سرعت در این دو راستا افزایش می‎یابد. ضمن اینکه در تمامی مقادیر فرکانس طبیعی، صفحه فاز، برای هردو متغییر، حلقه‎ی حدی[[7]](#footnote-7) است.

در قسمتی که تغییر مقدار اولیه متغییرها بررسی شد نیز برای هردو متغییر نتایج مشابهی به‎دست آمد. دیدیم که با افزایش مقدار اولیه‎ی هردو متغییر، دوره تناوب افزایش و در صورت ثابت ماندن مقدار اولیه‎ی یکی از متغییرها و افزایش دیگری، دوره تناوب کاهش می‎یابد. صفحه فاز در این خالت نیز حلقه‎ی حدی است، اما با افزایش مقادیر اولیه، مرتبه‎ی تغییرات سرعت بیشتر شده است. در نهایت مشاهده شد که با افزایش مقدار اولیه‎ی هرکدام از متغییرها، دامنه‎ی سرعت افزایش می‎یابد.

3-2- ارتعاش اجباری، حالتی که فرکانس طبیعی و فرکانس نیروی خارجی یکسان باشند

در این حالت، هیچ کدام از نمودارهای حرکتی نظم مشخصی را نشان نمی‎دهد. دامنه‎ها همواره دچار تغییرات ناگهانی می‎شود و صفحه فاز آشوبناک است.

در این حالت تغییرات صریب نیروی خارجی تاثیر چندانی در جرکت سیستم ندارد.

3-3- ارتعاش اجباری، حالتی که فرکانس طبیعی بزرگتر از فرکانس نیروی خارجی باشد

در حالت کلی هنگامی‎که فرکانس طبیعی بزرگتر از فرکانس نیروی خارجی باشد، در نمودار پاسخ زمانی x سه نوع تابع سینوسی با دوره تناوب‎های مختلف (که به ترتیب، تابع سینوسی کوچک، میانه و بزرگ نامیده می‎شوند) دیده ‎می‎شوند. با افزایش مقدار فرکانس طبیعی، دوره تناوب تابع سینوسی کوچک و با افزایش فرکانس نیروی خارجی، دوره تناوب تابع سینوسی میانه کاهش می‎یابد. با افزایش هرکدام از فرکانس‎ها، دوره تناوب تابع سینوسی بزرگ افزایش می‎یابد. لذا منشا تابع سینوسی کوچک فرکانس طبیعی، منشا تابع سینوسی میانه فرکانس یروی خارجی، و منشا تابع سینوسی بزرگ تعامل هردو فرکانس می‎باشد.

در نمودار صفحه فاز x، نکته‎ی حائز اهمیت نسبت فرکانس طبیعی و فرکانس نیروی خارجی است. هرچه این نسبت بیشتر شود، تعداد فازهای مشاهده شده در صفحه فاز افزایش می‎یابد و درصورتیکه این نسبت تغییر نکند، شکل صفحه فاز تغییر محسوسی نخواهد کرد و فقط زمان تغییر فازها مورد بحث است.

در پاسخ زمانی y دو نوع سینوس مشاهده می‎شود که با بررسی تغییرات فرکانس ها و با توجه به توضیحات فوق، تابع سینوسی کوچک ناشی از فرکانس طبیعی و تابع سینوسی بزرگ ناشی از تعامل دو فرکانس باهم می‎باشد.

در نمودار صفحه فاز y، تغییر محسوسی در نوع فازهای حرکتی مشاهده نمی‎شود.

در نهایت تغییرات ضریب نیروی خارجی بررسی می‎شود. با بررسی تغییرات k مشاهده‎ می‎شود که برای مقادیر کوچکتر k رفتار سیستم منظم‎تر و قابل پیش‎بینی است. هرچه مقدار k بیشتر شود، فازهای حرکتی و دامنه‎ی x و y افزایش می‎یابد. اگر مقدار k از مقدار مشخصی (بسته به مقدار فرکانس‎ها) بیشتر شود، رفتار سیستم آشوبناک و کاملا غیر قابل پیش‎بینی می‎شود.

**جدول 1** نحوه‎ی تغییر دامنه‎های حرکتی براساس تغییرات فرکانس‎ها وقتی ω0>ω

**Table 1** the manner of change in motion amplitudes based on changes in frequencies when ω0>ω

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| ω0>ω | دامنه‎ی u | دامنه‎ی u̇ | دامنه‎ی v | دامنه‎ی v̇ |
| افزایش ω0 | کاهش | کاهش | ثابت | افزایش |
| افزایش ω | کاهش | افزایش | ثابت | ثابت |

3-4- ارتعاش اجباری، حالتی که فرکانس نیروی خارجی بزرگتر از فرکانس طبیعی باشد

در این حالت نیز در پاسخ زمانی x، سه نوع تابع سینوسی دیده ‎می‎شود. با بررسی نمودارهای پاسخ زمانی برای مقادیر مختلف فرکانس خارجی و طبیعی، مشاهده ‎می‎شود که منشا تابع سینوسی کوچک فرکانس نیروی خارجی و منشا تابع سینوسی میانه، فرکانس طبیعی می‎باشد.

با تغییر فرکانس‎ها، تغییر محسوسی در رفتار سیستم در صفحه فاز x، دیده نمی‎شود و تنها تغییرات دامنه‎ی سرعت و زمان پُرشدن صفحه فاز مورد بحث است.

در پاسخ زمانی y نیز مشابه قسمت 1-3 دو نوع تابع سینوسی مشاهده می‎شود که توضیحات همان قسمت در این مورد نیز صدق می‎کند.

با افزایش فرکانس نیروی خارجی و یا به عبارتی افزایش فاصله‎ی مقادیر فرکانس طبیعی و فرکانس نیروی خارجی، نمودار صفحه فاز y، به سمت حلقه‎ی حدی میل می‎کند.

در نهایت در این حالت نیز تغییرات ضریب نیروی خارجی مورد بررسی قرار گرفته است. برای مقادیر کوچک k دامنه‎ی x با افزایش k بصورت مناسبی افزایش می‎یابد، اما با افزایش مقدار k از عدد مشخصی به بعد، دامنه‎ی x بطور ناگهانی افزایش می‎یابد و نمودار صفحه فاز آن نیز آشوبناک می‎شود. در حرکت y نیز نتایج مشابهی قابل برداشت است، اما بعد از اینکه مقدار k را از عدد مشخصی بیشتر شود، دامنه‎ی y با شدت بیشتری تغییر می‎کند و بازهم نمودار فاز آشوبناک می‎شود. در حالت کلی تاثیر تغییرات k روی y محسوس‎تر است.

**جدول 2** نحوه‎ی تغییر دامنه‎های حرکتی براساس تغییرات فرکانس‎ها وقتی ω0<ω

**Table 2** the manner of change in motion amplitudes based on changes in frequencies when ω0<ω

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| ω0<ω | دامنه‎ی u | دامنه‎ی u̇ | دامنه‎ی v | دامنه‎ی v̇ |
| افزایش ω0 | کاهش | کاهش | ثابت | در ابتدا کاهش سپس تقریبا ثابت |
| افزایش ω | کاهش | افزایش | ثابت | ثابت |

1. نتایج

بطور کلی دیده شد که ارتعاش آزاد سیستم یکپارچه است. پاسخ زمانی هر کدام از متغییرها متشکل از یک سینوس با مقادیر ثابت برای ماکزیمم و مینیمم می باشد و نمودارهای صفحه فاز آن حلقه‎ی حدی است.

در حالت ارتعاش اجباری، مشاهده شد که در پاسخ زمانی x سه نوع تابع سینوسی مشاهده شد که همواره تابع سینوسی کوچکتر، ناشی از فرکانس بزرگتر است. برای پاسخ زمانی y دو نوع تابع سینوسی مشاهده شد که تابع سینوسی کوچک ناشی از فرکانس طبیعی است. همچنین در اسخ زمانی هردو متغییر، یک تابع سینوسی بزرگتر نیز تشیل می‎شود که منشا آن نحوه‎ی تعامل هردو فرکانس است.

مشاهده شد که صفحه فاز x همواره کواسی است. در حالتی که فرکانس طبیعی بزرگتر است، با افزایش نسبت فرکانس طبیعی به فرکانس نیروی خارجی، فازهای حرکتی افزایش می‎یابد اما در حالتی که فرکانس خارجی بزرگتر باشد، با افزایش فرکانس‎ها شکل صفحه فاز تغییر چندانی نمی‎کند. در صفحه فاز y، بجز در مواردی که مقدار فرکانس ها نزدیک باشد، صفحه فاز در تمامی موارد کواسی است. ضمن اینکه شکل صفحه فاز تغییر نمی‎کند اما ابعاد آن دچار تغییر می‎شود.

در مورد تغییرات ضریب نیروی خارجی مشاهده شد که، چه در حالتی که فرکانس طبیعی و چه در حالتی که فرکانس نیروی خارجی بزرگتر باشد، همواره مقدار کوچکتر k پاسخ‎های مناسب‎تری را موجب می‎شود.

در تمامی مواردی که فرکانس طبیعی و فرکانس نیروی خارجی یکسان باشند، رفتار سیستم آشوبناک است.

فهرست علایم

|  |  |
| --- | --- |
| $$T$$ | انرژی جنبشی |
| $$V$$ | انرژی پتانسیل |
| $$ω\_{0}$$ | فرکانس طبیعی |
| $$ω$$ | فرکانس نیروی خارجی |
| $$k$$ | ضریب نیروی خارجی |

1. Bryant, P.J. and J.W. Miles, On a periodically forced, weakly damped pendulum. Part 2: Horizontal forcing. The ANZIAM Journal, 1990. 32(1): p. 23-41.

2. Cushman, R.H. and L.M. Bates, Global aspects of classical integrable systems. Vol. 94. 1997: Springer.

3. Bridges, T.J. and K.V. Georgiou, Computing global orbits of the forced spherical pendulum. Physica D: Nonlinear Phenomena, 2002. 165(1-2): p. 1-11.

4. Miles, J.W., Stability of forced oscillations of a spherical pendulum. Quarterly of Applied Mathematics, 1962: p. 21-32.

5. Miles, J., Resonant motion of a spherical pendulum. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1984. 11(3): p. 309-323.

6. Tritton, D., Ordered and chaotic motion of a forced spherical pendulum. European Journal of Physics, 1986. 7(3): p. 162.

7. Bryant, P.J., Breakdown to chaotic motion of a forced, damped, spherical pendulum. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1993. 64(1-3): p. 324-339.

8. Aston, P., Bifurcations of the horizontally forced spherical pendulum. Computer methods in applied mechanics and engineering, 1999. 170(3-4): p. 343-353.

9. Miles, J.W., Resonantly forced surface waves in a circular cylinder. Journal of Fluid Mechanics, 1984. 149: p. 15-31.

10. Miles, J., Resonantly forced, nonlinear gravity waves in a shallow rectangular tank. Wave Motion, 1985. 7(3): p. 291-297.

11. Nayfeh, A.H. and D.T. Mook, Nonlinear oscillations. 2008: John Wiley & Sons.

1. integrable [↑](#footnote-ref-1)
2. Cushman and Bates [↑](#footnote-ref-2)
3. Miles [↑](#footnote-ref-3)
4. bifurcation [↑](#footnote-ref-4)
5. Bryant [↑](#footnote-ref-5)
6. Aston [↑](#footnote-ref-6)
7. limit cycle [↑](#footnote-ref-7)