



مقایسه روش‌های تحلیل خیز بزرگ تیرها

سارا دارفرین^۱، یاسر تقی‌پورلاهیجانی^۲

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی سیرجان، سیرجان

۲- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی سیرجان، سیرجان

* سیرجان، صندوق پستی 7813733385، پست الکترونیکی sdarfarin1@gmail.com

چکیده

در سال‌های اخیر، تحلیل خیز تیرها یکی از تحقیقات بسیار پرکاربرد بوده است. در توسعه روش‌های تحلیل تغییرشکل تیرها، خیز بزرگ تیرها، یکی از حوزه‌های مورد توجه بوده است. با تنوع در روش‌های تحلیل تغییرشکل تیرها، اهمیت مقایسه این روش‌ها بصورتی قابل توجه خود را نشان می‌دهد. در این تحقیق ابتدا، مقایسه بر اساس فرضیات مربوط به تغییرشکل تیر و میدان جابجایی انجام شده است. سپس، به موضوع بدست آوردن توابع مربوط به جابجایی‌ها پرداخته شده است. با استفاده از توابع جابجایی، کرنش‌ها با روش‌های مختلف محاسبه شده‌اند و در نهایت، با مقایسه کرنش‌ها نتیجه‌گیری انجام شده است. هدف از این مقایسه، بررسی محدوده عملکرد صحیح مدل‌های خیز بزرگ تیرها بوده است. مدل مقایسه‌ای حاضر و روش تعیین توابع میدان جابجایی، می‌تواند به عنوان معیاری برای مقایسه تئوری‌های مختلف تحلیل و شبیه‌سازی تغییرشکل‌ها مورد استفاده قرار گیرند.

کلیدواژه‌ها

مقایسه، تیر، خیز بزرگ، تابع جابجایی، کرنش.

Comparison of large deflection analysis methods of beams

Sara Darfarin¹, Yasser Taghipour Lahijani²

1- Department of Mechanical Engineering, Sirjan University of Technology, Sirjan, Iran.

2- Department of Mechanical Engineering, Sirjan University of Technology, Sirjan, Iran

* P.O.B. 7813733385 Sirjan, Iran, sdarfarin1@gmail.com

Abstract

In recent years, the analysis of the deflection of beams has been one of the most widely used researches. In the development of beam deformation methods, the large deflection beams has been one of the areas of interest. With the variety of beam deformation methods, the importance of comparing these methods is remarkable. In this research at first, the comparison is based on assumptions about the deformation of the beam and the displacement field. Then, the issue of calculating of displacement functions is discussed. By using the displacement functions, the strains have been calculated in different methods and finally, by comparing the strains the comparison is completed. The purpose of this comparison is investigating the range of correct performance of large beam models. The present comparative model and the method of calculating of the displacement field functions, can be used to compare different theories of deformation analysis and simulation as a benchmark.

Keywords

Comparison, Beam, Large deflection, Displacement function, Strain.

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر، تحلیل خیز تیرها یکی از تحقیقات بسیار پرکاربرد در مهندسی مکانیک جامدات بوده است. موضوع خیز بزرگ تیرها، یعنی خیز در اثر جابجایی‌های بزرگ و کرنش‌های کوچک، در توسعه روش‌های تحلیل تغییرشکل تیرها، یکی از حوزه‌های مورد توجه بوده است. با تنوع در روش‌های تحلیل خیز تیرها، اهمیت مقایسه این روش‌ها، بصورتی قابل توجه خود را بروز می‌دهد.

اغلب مقایسه‌ها در کارهای حاضر، بر مبنای مقایسه نتایج روش‌های مختلف با یکدیگر می‌باشد [1-3]. این امر کار مقایسه را در شرایط کاملاً یکسان و دارای نتایج ممکن می‌سازد. در حالی که در این گونه مسائل، فرضیات تغییرشکل، میدان جابجایی و میدان کرنش از مهم‌ترین عوامل مؤثر بر نتایج نهایی می‌باشند.

در این تحقیق برای مقایسه روش‌های مختلف، ابتدا طبقه‌بندی مدل‌های تحلیل خیز بزرگ پیشنهادی برای تیرها، بر اساس نوع ساده‌سازی‌هایی که در فرض میدان تغییرمکان و میدان کرنش در نظر گرفته شده، انجام شده است.

سپس، برای مقایسه روش‌های مختلف تحلیل خیز تیرها، با فرض میدان جابجایی، با روش‌های مختلف معرفی شده، میدان کرنش محاسبه گردیده است و بعد از آن، مقادیر کرنش‌های محاسبه شده بر اساس روش‌های مختلف با مقادیر مرجع (دقیق‌ترین مقادیر کرنش در این تحقیق) مقایسه شده‌اند. توابع مربوط به میدان جابجایی از روش تأیید شده با نتایج تجربی، برای حالت‌های مختلف تکیه‌گاهی و بارگذاری تیر تعیین شده است. مقادیر مرجع کرنش، مقادیر کرنش حاصل از تئوری تیر تیموشنکو^۱ و بدون هیچ‌گونه تقریبی می‌باشند.

با توجه به مطالعه صورت گرفته، روش‌های تحلیل خیز بزرگ در دو دسته کلی انجام گرفته‌اند. دسته اول، آن روش‌هایی هستند که از اثر برش صرفنظر می‌کنند و به عبارتی بر پایه تئوری تیر اویلر-برنولی^۲ بنا شده‌اند و دسته دوم، آن روش‌هایی هستند که برش را در سطح مقطع تیر ثابت فرض می‌کنند و بر پایه تئوری تیر تیموشنکو بنا شده‌اند.

¹ Timoshenko beam theory

² Euler-Bernoulli beam theory

۱-۱- روش تحلیل خیز بزرگ تیرها بر پایه تئوری اویلر-برنولی

میدان جابجایی تیر بر اساس تئوری تیر اویلر-برنولی با توجه به شکل ۱، به صورت زیر خواهد بود [4]:

$$u(X, Y, Z) = u_0(X) - Y \sin(\theta(X)) \quad (1)$$

$$v(X, Y, Z) = v_0(X) - Y \{1 - \cos(\theta(X))\} \quad (2)$$

$$w(X, Y, Z) = 0 \quad (3)$$

مؤلفه‌های کرنش بر پایه رابطه کرنش‌های گرین-لاگرانژ^۱ بصورت زیر می‌باشند [5]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_m}{\partial X_j} \frac{\partial u_m}{\partial X_i} \right), i, j = 1, 2, 3 \quad (4)$$

در روش مبتنی بر تئوری تیر اویلر-برنولی تنها کرنش غیر صفر، کرنش ε_{xx} است.

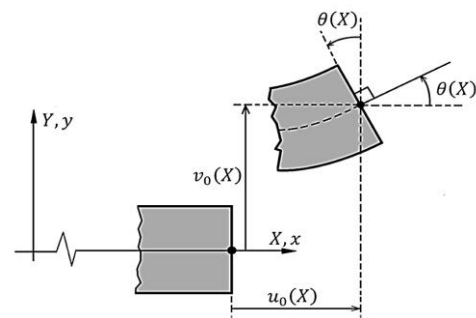


Fig. 1 Beam deformation based on Euler-Bernoulli beam theory

شکل ۱ تغییر شکل تیر براساس تئوری تیر اویلر-برنولی

روش اول (تقریب اول اویلر-برنولی)

در این روش [6-9]، فرضیات ساده کننده در محاسبه میدان جابجایی عبارتند از:

- عدم تغییر طول محوری، یعنی $u_0 = 0$
- $\cos \theta \approx 1$
- $\varepsilon_{ij} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right)$

روش دوم (تقریب دوم اویلر-برنولی)

در این روش [10-12]، فرضیات ساده کننده در محاسبه میدان جابجایی عبارتند از:

- $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \frac{dv_0}{dx}$
- $\cos \theta \approx 1$
- استفاده از کرنش‌های فون کارمن^۲

۱-۲- روش تحلیل خیز بزرگ تیرها بر پایه تئوری تیموشنکو (روش مرجع)

کلی‌ترین میدان جابجایی در این روش تحلیل [13-14]، با توجه به شکل ۲، به صورت آمده در ادامه خواهد بود:

$$u(X, Y, Z) = u_0(X) - Y \sin(\varphi(X)) \quad (5)$$

$$v(X, Y, Z) = v_0(X) - Y \{1 - \cos(\varphi(X))\} \quad (6)$$

$$w(X, Y, Z) = 0 \quad (7)$$

مؤلفه‌های کرنش بر اساس رابطه کرنش‌های گرین-لاگرانژ محاسبه گردیده و تنها کرنش‌های غیر صفر در روش مبتنی بر تئوری تیر تیموشنکو، کرنش برشی $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}$ و کرنش عمودی ε_{xx} می‌باشند.

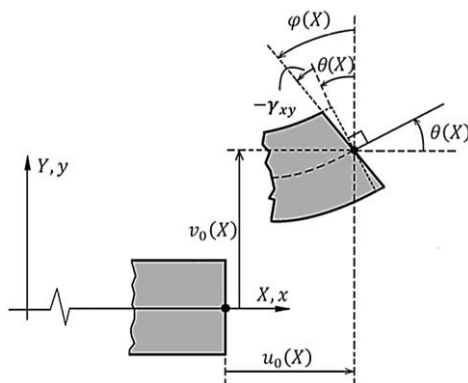


Fig. 2 Beam deformation based on Timoshenko beam theory

شکل ۲ تغییر شکل تیر براساس تئوری تیر تیموشنکو

روش سوم (تقریب اول تیموشنکو)

در این روش [10-12]، فرضیات ساده کننده در محاسبه میدان جابجایی عبارتند از:

- $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \varphi$
- $\cos \theta \approx 1$
- استفاده از کرنش‌های فون کارمن

روش چهارم (تقریب دوم تیموشنکو)

این روش [15]، فرضیات ساده کننده‌ای در محاسبه میدان جابجایی ندارد لذا میدان جابجایی به حالت کلی می‌باشد. ولی قسمت غیرخطی کرنش ε_{xx} را حذف می‌کند. در نهایت کرنش‌های ε_{xx} بصورت زیر است:

$$\varepsilon_{xx} \approx \frac{du_0}{dX} - Y \cos \varphi \frac{d\varphi}{dX} \quad (8)$$

روش پنجم (تقریب سوم تیموشنکو)

در این روش [14]، میدان جابجایی به کلی‌ترین شکل و بدون فرضیات ساده کننده می‌باشد، فقط کرنش ε_{xx} با استفاده از روش خطی سازی سازگار به شکل زیر ساده سازی شده است:

$$\varepsilon_{xx} = \left(1 + \frac{du_0}{dX} \right) \cos \varphi + \frac{dv_0}{dX} \sin \varphi - Y \frac{d\varphi}{dX} - 1 \quad (9)$$

¹ The green-Lagrange strains

² The von Kármán strains

توابع موقعیت نهایی گره‌ها از روی نتایج روش پنجم بدست می‌آیند. نتایج روش پنجم، مقادیر جابجایی در جهت افقی X ، عمودی Y و دوران سطح مقطع تیر، به ترتیب u ، v و φ می‌باشند. برای بدست آوردن توابع $u(X)$ ، $v(X)$ و $\varphi(X)$ از روی مقادیر از نرم افزار اکسل^۲ استفاده شده است. در اکسل از چند جمله‌ای‌های با بالاترین دقت ($R^2 = 1$) استفاده شده است. با استفاده از فرضیات ساده کننده بیان شده در قسمت قبل و توابع چندجمله‌ای حاصل از تطبیق بر مقادیر جابجایی، محاسبات مربوط به کرنش انجام می‌گردد. در محاسبات کرنش ارتفاع تیر ۰.۰۰۰۲ متر قرار داده شده است، یعنی کرنش عمودی در سطح بالای تارخشی، کرنش حداکثر عمودی در هر نقطه از تیر بررسی گردد.

۲-۲- نمودارهای کرنش

نمودارهای کرنش حاصل از روش‌های بیان شده برپایه فرضیات ساده کننده برای میدان جابجایی بصورت شکل ۴ تا ۶ می‌باشد.

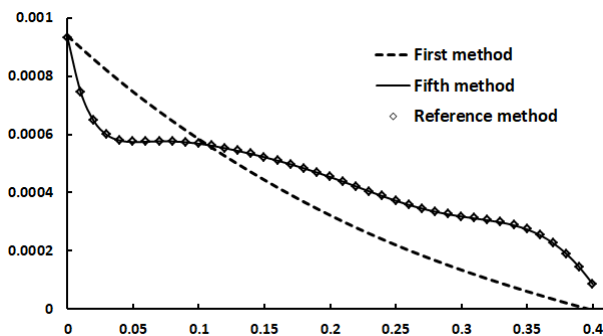


Fig. 4 Comparison of normal strain of the first and fifth method with reference normal strain in the length of beam

شکل ۴ مقایسه کرنش عمودی روش اول و پنجم با کرنش عمودی مرجع در طول تیر

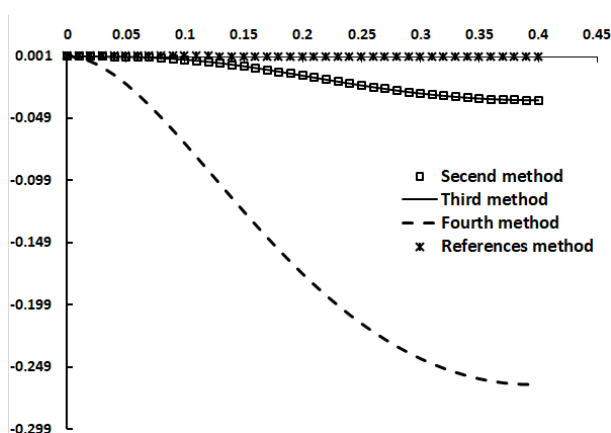


Fig. 5 Comparison of normal strain of the second, third and fourth method with reference normal strain in the length of beam

شکل ۵ مقایسه کرنش عمودی روش دوم، سوم و چهارم با کرنش عمودی مرجع در طول تیر

۲- رویکرد حل مسئله

در روش پنجم، برای حل معادلات از کد متلب^۱ بر پایه اجزاء محدود استفاده شده است. نتایج برنامه اجزاء محدود با نتایج تجربی [16]، در شکل ۳ مقایسه و ارزیابی شده‌اند. تیر مفروض یک سرگیردار، ساخته شده از فولاد و تحت بار گسترده یکنواخت در طول (وزن خود تیر) ۰.۷۵۸ و یک نیروی متمرکز عمودی در انتهای آزاد می‌باشد. سطح مقطع تیر مستطیل شکل با عرض ۰.۰۲۵ متر، ارتفاع ۰.۰۰۰۴ متر بوده و ۰.۴ متر طول دارد.

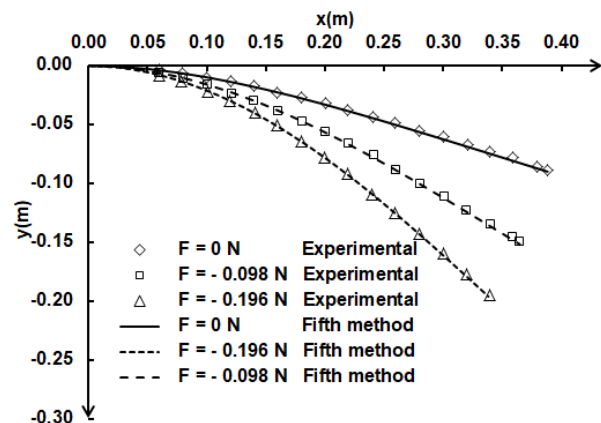


Fig. 3 Comparison between the results of fifth method for large deflections of steel cantilever beam, under distributed and concentrated force by experimental data

شکل ۳ مقایسه بین نتایج روش پنجم برای خیزهای تیر یک سرگیر فولادی، تحت بار گسترده و متمرکز با روش تجربی

مقایسه نتایج، تطابق بسیار خوبی را بین خیزهای اندازه‌گیری شده تجربی و نتایج عددی روش پنجم نشان داده است. از آنجا که در اندازه‌گیری‌های تجربی -همانطور که در شکل هم قابل مشاهده است- برخی از خیزها کمتر، برخی بیشتر و برخی دقیق گزارش شده‌اند، امکان تعیین توابع میدان جابجایی از روی مقادیر روش تجربی با یک تابع هموار امکان‌پذیر نیست. لذا، توابع میدان جابجایی از روش پنجم -که دقت آن با نتایج تجربی تأیید شده است- بدست آمدند.

برای مقایسه روش‌های مختلف تحلیل خیز تیرها، با داشتن توابع میدان جابجایی، مقادیر کرنش بدست آمده از روش‌های مختلف با مقادیر کرنش مرجع مقایسه شده‌اند. نتایج به صورت نمودارهای مقایسه‌ای ارائه شده‌اند.

۲-۱- بیان مسئله

تیر فولادی یک سرگیردار تحت بار گسترده وزن خود تیر و بار متمرکز F در انتهای آزاد به مقدار ۰.۱۹۶ نیوتن، سطح مقطع مستطیل شکل به ابعاد ۰.۰۲۵ متر عرض، ارتفاع ۰.۰۰۰۴ متر و طول ۰.۴ متر [16] انتخاب شده است.

² Excel software

¹ Matlab software



- theory. Applied Mathematical Modelling, 32(12), 2509-2525, 2008.
- [4] P. Nanakorn, L. Vu, A 2D field-consistent beam element for large displacement analysis using the total Lagrangian formulation. Finite Elements in Analysis and Design, 42(14): p. 1240-1247, 2006.
- [5] W.M. Lai, D. Rubin, and E. Krempel, *Introduction to continuum mechanics*. Butterworth-Heinemann, 2009.
- [6] K. Bisshopp, and D. Drucker, *Large deflection of cantilever beams*. Quarterly of Applied Mathematics, 3(3): p. 272-275, 1945.
- [7] A. Ohtsuki, , *An analysis of large deflection in a symmetrical three-point bending of beam*. Bulletin of JSME, 29(253): p. 1988-1995, 1986.
- [8] F.A., Chouery, *Exact and numerical solutions for large deflection of elastic non-prismatic beams*. FAC Systems INC., WA, 2006.
- [9] M. Maleki, S.A.M. Tonekaboni, and S. Abbasbandy, *A homotopy analysis solution to large deformation of beams under static arbitrary distributed load*. Applied Mathematical Modelling, 38(1): p. 355-368, 2014.
- [10] Nishawala, V., *A study of large deflection of beams and plates*. Rutgers University-Graduate School-New Brunswick, 2011.
- [11] R. De Borst, M.A. Crisfield, J. J. Remmers, C. V. Verhoosel, *Nonlinear finite element analysis of solids and structures*, John Wiley & Sons, 2012.
- [12] N.D., Kien, *A Timoshenko beam element for large displacement analysis of planar beams and frames*. International Journal of Structural Stability and Dynamics, 12(06): p. 1250048, 2012.
- [13] O.C. Zienkiewicz, and R.L. Taylor, *The finite element method: solid mechanics*. Vol. 2. Butterworth-heinemann, 2000.
- [14] C.A., Felippa, *Nonlinear finite element methods*. University of Colorado, Boulder, Colorado, USA, 2001.
- [15] A. Mohyeddin, and A. Fereidoon, *An analytical solution for the large deflection problem of Timoshenko beams under three-point bending*. International Journal of Mechanical Sciences, 78: p. 135-139, 2014.
- [16] T. Belendez, C. Neipp, & A. Beléndez, *Numerical and experimental analysis of a cantilever beam: a laboratory project to introduce geometric nonlinearity in mechanics of materials*. 2003.

در روش اول و دوم از کرنش برشی صرف نظر می شود. در روش های سوم، چهارم و پنجم، تنها در روش سوم کرنش برشی با کرنش مرجع فرمولاسیون متفاوتی را دارا است. لذا در شکل ۶ مقایسه شده است. مقدار کرنش برشی مرجع بین 0 تا -0.001 می باشد.

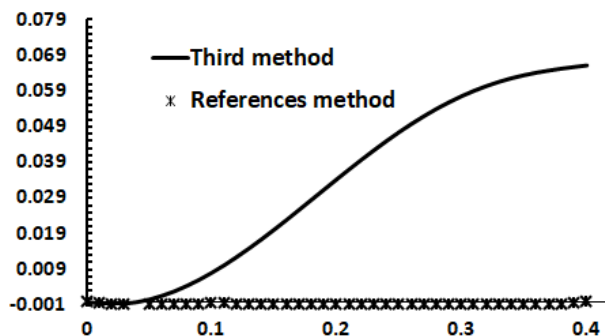


Fig. 6 Comparison of shear strain of the third with reference shear strain in the length of beam

شکل ۶ مقایسه کرنش برشی روش سوم با کرنش برشی مرجع در طول تیر

۳- نتیجه گیری

با توجه به فرضیات ساده کننده ارائه شده، کرنش پنجم که میدان جابجایی آن به کلی ترین شکل و بدون فرضیات ساده کننده در نظر گرفته شده است دارای بیشترین همخوانی با کرنش مرجع می باشد؛ کرنش چهارم فرضیات ساده کننده ای در محاسبه میدان جابجایی ندارد. اما به دلیل حذف قسمت غیرخطی کرنش عمودی دارای اختلاف حداکثری با کرنش عمودی مرجع می باشد. کرنش سوم و دوم با استفاده از تئوری کرنش فون کارمن در فرضیات ساده کننده، دارای تقریب نزدیک به یکدیگر می باشند که در نهایت خطای کمتری در انتهای آزاد تیر نسبت به کرنش مرجع دارا می باشند. کرنش عمودی اول دارای دقت خوبی می باشد، ولی از کرنش برشی صرف نظر کرده است. در نتیجه می توان دریافت که روش چهارم که حداکثر خطا را داراست، فرض ساده کننده مناسبی را جهت محاسبه خیز بزرگ تیر یک-سردرگیر ارائه ننموده است و روش پنجم دقیق ترین روش می باشد. بعلاوه، فرمول بندی اجزاء محدودی روش پنجم، قابلیت مدل سازی تیرهای با سطح مقطع های یکنواخت و غیر یکنواخت، تحت بارگذاری ها و شرایط مرزی دلخواه را دارد.

۴- مراجع

- [1] Li, Dao-Kui, Li, Xian-Fang, *Large deflection and rotation of Timoshenko beams with frictional end supports under three-point bending*. Comptes Rendus Mécanique, 344.8: 556-568, 2016.
- [2] A. Labuschagne, N. J. van Rensburg & A. J. Van der Merwe, *Comparison of linear beam theories*. Mathematical and Computer Modelling, 49(1-2), 20-30, 2009.
- [3] R. Kadoli, K. Akhtar, & N. Ganesan, *Static analysis of functionally graded beams using higher order shear deformation*