مقایسه روش­های تحلیل خیز بزرگ تیرها

سارا دارفرین1، یاسر تقی­پورلاهیجانی2

1- دانشجوی کارشناسی­ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی سیرجان، سیرجان

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی سیرجان، سیرجان

\* سیرجان، صندوق پستی 7813733385، پست الکترونیکی sdarfarin1@gmail.com

چکیده

در سال­های اخیر، تحلیل خیز تیرها یکی از تحقیقات بسیار پرکاربرد بوده است. در توسعه روش­های تحلیل تغییرشکل تیرها، خیز بزرگ تیرها، یکی از حوزه­های مورد توجه بوده است. با تنوع در روش­های تحلیل تغییرشکل تیرها، اهمیت مقایسه این روش­ها بصورتی قابل توجه خود را نشان می­دهد. در این تحقیق ابتدا، مقایسه بر اساس فرضیات مربوط به تغییرشکل تیر و میدان جابجایی انجام شده است. سپس، به موضوع بدست آوردن توابع مربوط به جابجایی­ها پرداخته شده است. با استفاده از توابع جابجایی، کرنش­ها با روش­های مختلف محاسبه شده­اند و در نهایت، با مقایسه کرنش­ها نتیجه­گیری انجام شده است. هدف از این مقایسه، بررسی محدوده عملکرد صحیح مدل­های خیز بزرگ تیرها بوده است. مدل مقایسه­ای حاضر و روش تعیین توابع میدان جابجایی، می­توانند به عنوان معیاری برای مقایسه تئوری­های مختلف تحلیل و شبیه­سازی تغییرشکل­ها مورد استفاده قرار گیرند.

**کلی**د‌واژگ**ان**

مقایسه، تیر، خیز بزرگ، تابع جابجایی، کرنش.

Comparison of large deflection analysis methods of beams

Sara Darfarin1, Yasser Taghipour Lahijani2

1- Department of Mechanical Engineering, Sirjan University of Technology, Sirjan, Iran.

2- Department of Mechanical Engineering, Sirjan University of Technology, Sirjan, Iran

\* P.O.B. 7813733385 Sirjan, Iran, sdarfarin1@gmail.com

Abstract

In recent years, the analysis of the deflection of beams has been one of the most widely used researches. In the development of beam deformation methods, the large deflection beams has been one of the areas of interest. With the variety of beam deformation methods, the importance of comparing these methods is remarkable. In this research at first, the comparison is based on assumptions about the deformation of the beam and the displacement field. Then, the issue of calculating of displacement functions is discussed. By using the displacement functions, the strains have been calculated in different methods and finally, by comparing the strains the comparison is completed. The purpose of this comparison is investigating the range of correct performance of large beam models. The present comparative model and the method of calculating of the displacement field functions, can be used to compare different theories of deformation analysis and simulation as a benchmark.

Keywords

Comparison, Beam, Large deflection, Displacement function, Strain.

1. مقدمه

در سال­های اخیر، تحلیل خیز تیرها یکی از تحقیقات بسیار پرکاربرد در مهندسی مکانیک جامدات بوده است. موضوع خیز بزرگ تیرها، یعنی خیز در اثر جابجایی­های بزرگ و کرنش­های کوچک، در توسعه روش­های تحلیل تغییرشکل تیرها، یکی از حوزه­های مورد توجه بوده است. با تنوع در روش­های تحلیل خیز تیرها، اهمیت مقایسه این روش­ها، بصورتی قابل توجه خود را بروز می دهد.

اغلب مقایسه­ها در کارهای حاضر، بر مبنای مقایسه نتایج روش­های مختلف با یکدیگر می­باشد[3-1]. این امر کار مقایسه را در شرایط کاملاً یکسان و دارای نتایج ممکن می­سازد. در حالی­که در این­گونه مسائل، فرضیات تغییرشکل، میدان جابجایی و میدان کرنش از مهم­ترین عوامل مؤثر بر نتایج نهایی می­باشند.

در این تحقیق برای مقایسه روش­های مختلف، ابتدا طبقه­بندی مدل­های تحلیل خیز بزرگ پیشنهادی برای تیرها، بر اساس نوع ساده­سازی­هایی که در فرض میدان تغییرمکان و میدان کرنش در نظر گرفته شده، انجام شده است. سپس، برای مقایسه روش­های مختلف تحلیل خیز تیرها، با فرض میدان جابجایی، با روش­های مختلف معرفی شده، میدان کرنش محاسبه گردیده است و بعد از آن، مقادیر کرنش­های محاسبه شده بر اساس روش­های مختلف با مقادیر مرجع(دقیق­ترین مقادیر کرنش در این تحقیق) مقایسه شده­اند.

توابع مربوط به میدان جابجایی از روش تأیید شده با نتایج تجربی، برای حالت­های مختلف تکیه­گاهی و بارگذاری تیر تعیین شده است. مقادیر مرجع کرنش، مقادیر کرنش حاصل از تئوری تیر تیموشنکو[[1]](#footnote-1) و بدون هیچ­گونه تقریبی می­باشند.

با توجه به مطالعه صورت گرفته، روش­های تحلیل خیز بزرگ در دو دسته کلی انجام گرفته­اند. دسته اول، آن روش­هایی هستند که از اثر برش صرفنظر می­کنند و به عبارتی بر پایه تئوری تیر اویلر- برنولی[[2]](#footnote-2) بنا شده­اند و دسته دوم، آن روش­هایی هستند که برش را در سطح مقطع تیر ثابت فرض می­کنند و بر پایه تئوری تیر تیموشنکو بنا شده­اند.

1-1- روش­ تحلیل­ خیز بزرگ تیرها بر پایه تئوری اویلر- برنولی

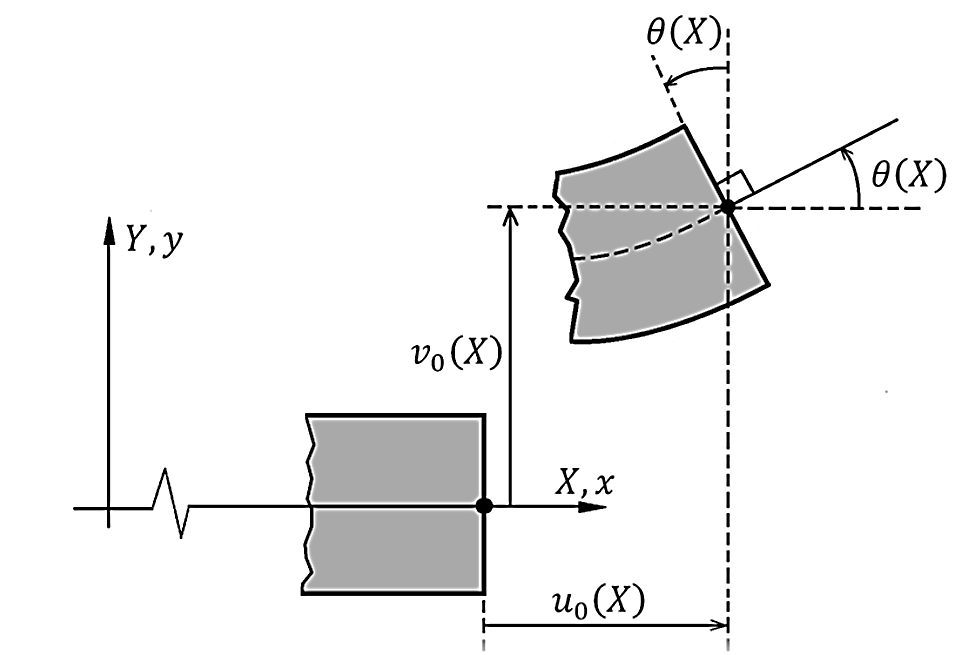
میدان جابجایی تیر بر اساس تئوری تیر اویلر- برنولی با توجه به شکل 1، به صورت زیر خواهد بود[4]:

|  |  |
| --- | --- |
|  | |
| (1) |  |
|  | |
| (2) |  |
|  | |
| (3) |  |
|  | |

*مؤلفه­های کرنش بر پایه رابطه کرنش­های گرین-لاگرانژ[[3]](#footnote-3) بصورت زیر می­باشند*[5]:

|  |  |
| --- | --- |
|  | |
| (4) |  |
|  | |

در روش مبتنی بر تئوری تیر اویلر- برنولی تنها کرنش غیر صفر، کرنش است.



|  |
| --- |
| **Fig. 1** Beam deformation based on Euler-Bernoulli beam theory  **شكل 1** تغییرشکل تیر براساس تئوری تیر اویلر-برنولی |
|  |

**روش اول(تقریب اول اویلر- برنولی)**

در این روش[6-9]، فرضیات ساده کننده در محاسبه میدان جابجایی عبارتند از:

* عدم تغییر طول محوری، یعنی

**روش دوم(تقریب دوم اویلر- برنولی)**

در این روش[10-12]، فرضیات ساده کننده در محاسبه میدان جابجایی عبارتند از:

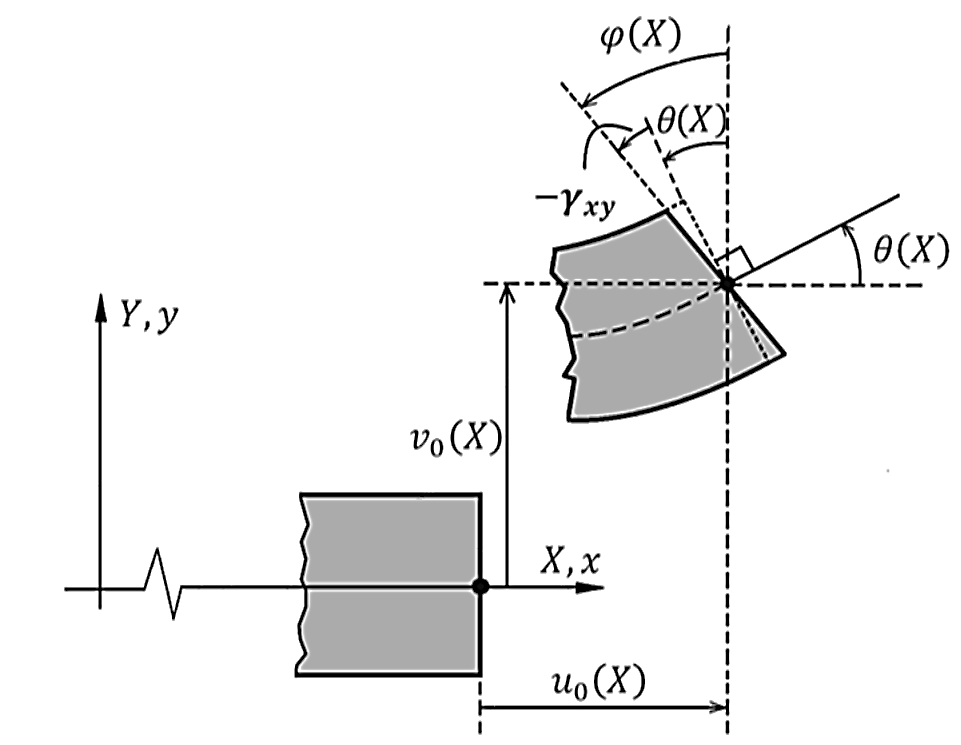
* استفاده از کرنش­های فون کارمن[[4]](#footnote-4)

1-2- روش­ تحلیل­ خیز بزرگ تیرها بر پایه تئوری تیموشنکو(روش مرجع)

کلی­ترین میدان جابجایی در این روش تحلیل[13-14]، با توجه به شکل 2، به صورت آمده در ادامه خواهد بود:

|  |  |
| --- | --- |
|  | |
| (5) |  |
|  | |
| (6) |  |
|  | |
| (7) |  |
|  | |

مؤلفه­های کرنش بر اساس رابطه کرنش­های گرین-لاگرانژ محاسبه گردیده و تنها کرنش­های غیر صفر در روش مبتنی بر تئوری تیر تیموشنکو، کرنش برشی و کرنش عمودی می­باشند.



|  |
| --- |
| **Fig. 2** Beam deformation based on Timoshenko beam theory  **شكل 2** تغییرشکل تیر براساس تئوری تیر تیموشنکو |
|  |

**روش سوم(تقریب اول تیموشنکو)**

در این روش[10-12]، فرضیات ساده کننده در محاسبه میدان جابجایی عبارتند از:

* استفاده از کرنش­های فون کارمن

**روش چهارم(تقریب دوم تیموشنکو)**

این روش[15]، فرضیات ساده­کننده­ای در محاسبه میدان جابجایی ندارد لذا میدان جابجایی به حالت کلی می­باشد. ولی قسمت غیرخطی کرنش را حذف می­کند. در نهایت کرنش­های بصورت زیر است:

|  |  |
| --- | --- |
|  | |
| (8) |  |
|  | |

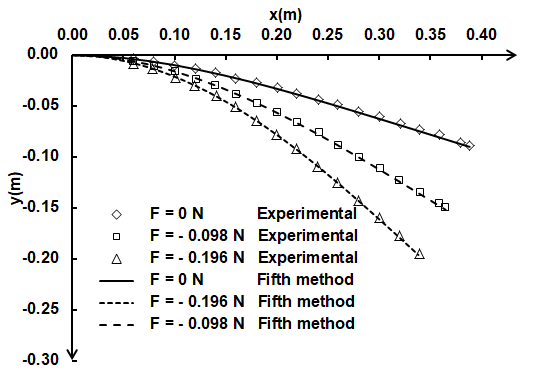
**روش پنجم(تقریب سوم تیموشنکو)**

در این روش[14]، میدان جابجایی به کلی­ترین شکل و بدون فرضیات ساده کننده می­باشد، فقط کرنش با استفاده از روش خطی سازی سازگار به شکل زیر ساده سازی شده است:

|  |  |
| --- | --- |
|  | |
| (9) |  |
|  | |

1. رویکرد حل مسئله

در روش پنجم، برای حل معادلات از کد متلب[[5]](#footnote-5) بر پایه اجزاء محدود استفاده شده است. نتایج برنامه اجزاء محدود با نتایج تجربی[16]، در شکل3 مقایسه و ارزیابی شده­اند. تیر مفروض یک­سرگیردار، ساخته شده از فولاد و تحت بار گسترده یکنواخت در طول(وزن خود تیر)0.758 و یک نیروی متمرکز عمودی در انتهای آزاد می­باشد. سطح مقطع تیر مستطیل شکل با عرض 0.025 متر، ارتفاع 0.0004 متر بوده و 0.4 متر طول دارد.



|  |
| --- |
| **Fig. 3** Comparison between the results of fifth method for large deflections of steel cantilever beam, under distributed and concentrated force by experimental data  **شكل 3** مقایسه بین نتایج روش پنجم برای خیزهای تیر یک سردرگیر فولادی، تحت بار گسترده و متمرکز با روش تجربی |
|  |

مقایسۀ نتایج، تطابق بسیار خوبی را بین خیزهای اندازه­گیری شده تجربی و نتایج عددی روش پنجم نشان داده است. از آنجا که در اندازه­گیری­های تجربی -همانطور که در شکل هم قابل مشاهده است- برخی از خیزها کمتر، برخی بیشتر و برخی دقیق گزارش شده­اند، امکان تعیین توابع میدان جابجایی از روی مقادیر روش تجربی با یک تابع هموار امکان­پذیر نیست. لذا، توابع میدان جابجایی از روش پنجم-که دقت آن با نتایج تجربی تأیید شده است- بدست آمدند.

برای مقایسه روش­های مختلف تحلیل خیز تیرها، با داشتن توابع میدان جابجایی، مقادیر کرنش بدست آمده از روش­های مختلف با مقادیر کرنش مرجع مقایسه شده­اند. نتایج به صورت نمودارهای مقایسه­ای ارائه شده­اند.

2-1- بیان مسئله

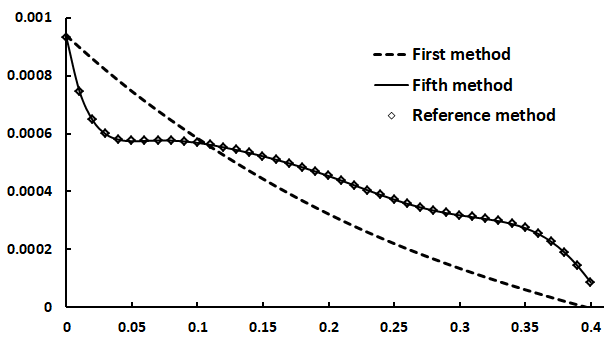
*تیر فولادی یک­سرگیردار تحت بار گسترده وزن خود تیر و بار متمرکز F در انتهای آزاد به مقدار* 0.196 *نیوتن،* سطح مقطع مستطیل شکل به ابعاد0.025 متر عرض، ارتفاع 0.0004 متر *و طول* 0.4 متر[16] انتخاب شده است.

توابع موقعیت نهایی گره­ها از روی نتایج روش پنجم بدست می­آیند. نتایج روش پنجم، مقادیر جابجایی در جهت افقی ، عمودی و دوران سطح مقطع تیر، به ترتیب ، و می­باشند. برای بدست آوردن توابع ، و از روی مقادیر از نرم افزار اکسل[[6]](#footnote-6) استفاده شده است. در اکسل از چند جمله­ای­های *با بالاترین دقت* استفاده شده است*.*

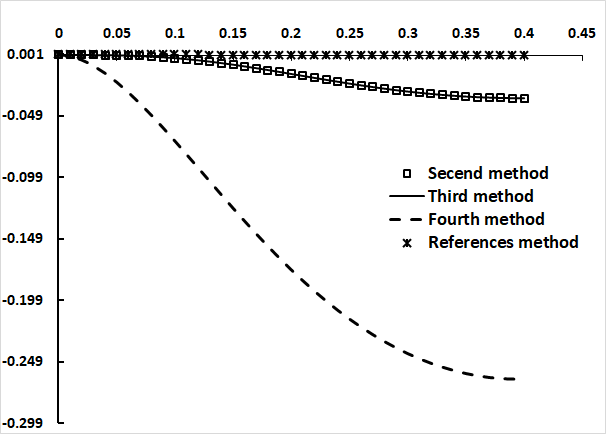
*با استفاده از فرضیات ساده کننده بیان شده در قسمت قبل و توابع چندجمله­ای حاصل از تطبیق بر مقادیر جابجایی، محاسبات مربوط به کرنش انجام می­گردد. در محاسبات کرنش ارتفاع برای تیر* 0.0002 *متر قرار داده شده است، یعنی کرنش عمودی در سطح بالای تارخنثی، کرنش حداکثر عمودی در هر نقطه از تیر بررسی گردد.*

2-2- نمودارهای کرنش

نمودارهای کرنش حاصل از روش­های بیان شده برپایه فرضیات ساده کننده برای میدان جابجایی بصورت شکل4 تا 6 می­باشد.

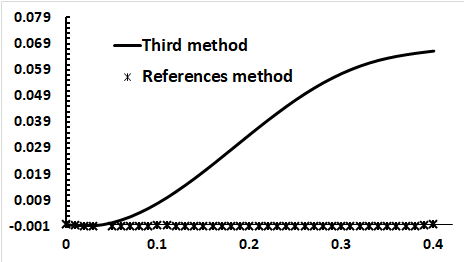


|  |
| --- |
| **Fig. 4** Comparison of normal strain of the first and fifth method with reference normal strain in the length of beam  **شكل 4** مقایسه کرنش عمودی روش اول و پنجم با کرنش عمودی مرجع در طول تیر |
|  |



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| |  | | --- | | **Fig. 5** Comparison of normal strain of the second, third and fourth method with reference normal strain in the length of beam  **شكل 5** مقایسه کرنش عمودی روش دوم، سوم و چهارم با کرنش عمودی مرجع در طول تیر | |  | |

در روش اول و دوم از کرنش برشی صرف­نظر می­شود. در روش­های سوم، چهارم و پنجم، تنها در روش سوم کرنش برشی با کرنش مرجع فرمولاسیون متفاوتی را دارا است. لذا در شکل 6 مقایسه شده است. مقدار کرنش برشی مرجع بین 0 تا -0.001 می­باشد.



|  |
| --- |
| **Fig. 6** Comparison of shear strain of the third with reference shear strain in the length of beam  **شكل 6** مقایسه کرنش برشی روش سوم با کرنش برشی مرجع در طول تیر |
|  |

3- نتیجه­گیری

*با توجه به فرضیات ساده کننده ارائه شده، کرنش پنجم که* میدان جابجایی آن به کلی­ترین شکل و بدون فرضیات ساده کننده *در نظر گرفته شده است دارای بیش­ترین هم­خوانی با کرنش مرجع می­باشد؛ کرنش چهارم* فرضیات ساده­کننده­ای در محاسبه میدان جابجایی ندارد. اما به دلیل حذف قسمت غیر­خطی کرنش عمودی دارای اختلاف حداکثری با کرنش عمودی مرجع می­باشد. کرنش سوم و دوم با استفاده از تئوری کرنش فون کارمن در فرضیات ساده کننده، دارای تقریب نزدیک به یکدیگر می­باشند که در نهایت خطای کمتری در انتهای آزاد تیر نسبت به کرنش مرجع دارا می­باشند. کرنش عمودی اول دارای دقت خوبی می­باشد، ولی از کرنش برشی صرف­نظر کرده است. در نتیجه می­توان دریافت که روش چهارم که حداکثر خطا را داراست، فرض ساده­ کننده مناسبی را جهت محاسبه خیز بزرگ تیر یک­سردرگیر ارائه ننموده است و روش پنجم دقیق­ترین روش می­باشد. بعلاوه، فرمول­بندی اجزاء محدودی روش پنجم، قابلیت مدل­سازی تیر­های با سطح مقطع­های یکنواخت و غیریکنواخت، تحت بارگذاری­ها و شرایط مرزی دلخواه را دارد.

4- مراجع

[1] Li, Dao-Kui, Li, Xian-Fang, *Large deflection and rotation of Timoshenko beams with frictional end supports under three-point bending*. Comptes Rendus Mécanique, 344.8: 556-568, 2016.

[2] A. Labuschagne, N. J van Rensburg & A. J. Van der Merwe, *Comparison of linear beam theories*. *Mathematical and Computer Modelling*, *49*(1-2), 20-30, 2009.

[3] R. Kadoli, K. Akhtar, & N. Ganesan, *Static analysis of functionally graded beams using higher order shear deformation theory.*Applied Mathematical Modelling, *32*(12), 2509-2525, 2008.

[4] P. Nanakorn, L. Vu, *A 2D field-consistent beam element for large displacement analysis using the total Lagrangian formulation.* Finite Elements in Analysis and Design, 42(14): p. 1240-1247, 2006.

[5] W.M. Lai, D. Rubin, and E. Krempl, *Introduction to continuum mechanics.* Butterworth-Heinemann*,* 2009*.*

[6] K. Bisshopp, and D. Drucker, *Large deflection of cantilever beams.* Quarterly of Applied Mathematics, 3(3): p. 272-275, 1945.

[7] A. Ohtsuki, , *An analysis of large deflection in a symmetrical three-point bending of beam.* Bulletin of JSME, 29(253): p. 1988-1995, 1986.

[8] F.A., Chouery, *Exact and numerical solutions for large deflection of elastic non-prismatic beams.* FAC Systems INC., WA, 2006.

[9] M. Maleki, S.A.M. Tonekaboni, and S. Abbasbandy, *A homotopy analysis solution to large deformation of beams under static arbitrary distributed load*. Applied Mathematical Modelling, 38(1): p. 355-368, 2014.

[10] Nishawala, V., *A study of large deflection of beams and plates*. Rutgers University-Graduate School-New Brunswick. 2011,

[11] R. De Borst, M.A. Crisfield, J. J. Remmers, C. V. Verhoosel, *Nonlinear finite element analysis of solids and structures,* John Wiley & Sons, 2012.

[12] N.D., Kien, *A Timoshenko beam element for large displacement analysis of planar beams and frames.* International Journal of Structural Stability and Dynamics, 12(06): p. 1250048, 2012.

[13] O.C. Zienkiewicz, and R.L. Taylor, *The finite element method: solid mechanics*. Vol. 2. Butterworth-heinemann, 2000.

[14] C.A., Felippa, *Nonlinear finite element methods.* University of Colorado, Boulder, Colorado, USA, 2001.

[15] A. Mohyeddin, and A. Fereidoon*, An analytical solution for the large deflection problem of Timoshenko beams under three-point bending.* International Journal of Mechanical Sciences, 78: p. 135-139, 2014.

[16] T. Belendez, C. Neipp, & A. Beléndez*, Numerical and experimental analysis of a cantilever beam: a laboratory project to introduce geometric nonlinearity in mechanics of materials*.‏ 2003.

1. Timoshenko beam theory [↑](#footnote-ref-1)
2. Euler\_Bernoulli beam theory [↑](#footnote-ref-2)
3. The green-Lagrange strains [↑](#footnote-ref-3)
4. The von Kármán strains [↑](#footnote-ref-4)
5. Matlab software [↑](#footnote-ref-5)
6. Excel software [↑](#footnote-ref-6)